Math. P.
315 m.

R

Analytische
GEOMETRIE.

Von

J. J. Littrow,

Director der Sternwarte und Professor der Astronomie an der k. k. Universität in Wien, Mitglied der kais. russ. Academie der Wissenschaften in St. Petersburg, der kön. Gesellschaft der Wissenschaften in Prag, der kön. grossbrit. astronomischen Gesellschaft in London, der k. k. Landwirthschaftsgesellschaft in Wien, der Academie der Wissenschaften in Krakau, Ehrenmitglied der kais. Universität in Kasan etc.

Wien.

Bey Carl Schaumburg und Comp.

1823.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Ihro hochfürstlichen Durchlaucht,

Charlotte,

verwitweten Herzoginn von Sachsen-Gotha und Altenburg,
gebornen Herzoginn von Sachsen-Coburg-Meiningen
etc. etc.

mit inniger Verehrung
gewidmet

von dem

Verfasser.

Ew. hochfürstliche Durchlaucht!

Die Begründung der schönen Epoche der Astronomie, deren sich jetzt unser Vaterland erfreut, ging aus dem erlauchten Hause von Sachsen-Gotha hervor. Der uns allen unvergessliche Herzog *Ernst der Zweyte*, dieser erhabene Freund und Beschützer der Sternkunde, dieses seltene Vorbild fürstlicher und häuslicher Tugend, errichtete den ersten der Wissenschaft würdigen Tempel Uraniens in Deutschland. Diese Sternwarte wurde gleich nach ihrer Entstehung ein Muster der übrigen, von ihr ging ein neues Leben für die Astronomie in Deutschland aus, und ihr Glanz überstrahlte bald selbst viele

ältere ähnliche Institute des Auslandes, besonders unter der glücklich gewählten Leitung eines der ersten Astronomen, dem an Eifer und unermüdlicher Thätigkeit kein anderer glich, der ein früher nicht gekanntes reges Leben für die Wissenschaft unter uns erweckte, den die meisten der jetzt lebenden deutschen Astronomen als ihren Lehrer verehren, und der seines hohen ruhmgekrönten Alters ungeachtet selbst in der Ferne noch auf die vielfältigste Weise wohlthätig auf die Cultur der Astronomie in unserem Vaterlande einwirkt.

Dass diess alles, auch nach dem Hintritte des Verewigten, noch möglich wurde; dass das von Ihm erbaute Denkmahl noch besteht, während mächtige Reiche zusammen stürzten, und Länder im Strome der Zeit untergingen; dass grosser Stürme ungeachtet die erhabene Wissenschaft wie im stillen Frieden unter uns gedieh, und dass wir uns nun der reichen Ernte seiner mit wahrhaft fürstlicher Grossmuth ausgestreuten Wohlthaten erfreuen — diess alles sind wir der erhaltenden Fürsorge *Seiner Erlauchten Gemahlinn* schuldig, und ich schätze

mich glücklich, *Ew. hochfürstlichen Durchlaucht* hier, wenn gleich nur ein kleines Zeichen des Dankes zu bringen, der für das hohe Fürstenpaar ewig in dem Herzen eines jeden guten Deutschen leben wird.

Ew. hochfürstlichen Durchlaucht

Wien, den 10. December 1822.

unterthänig-gehorsamster
Diener,

J. J. Littrow.

Vorrede.

Die analytische Geometrie, die ersten Anfangsgründe derselben etwa ausgenommen, ist ihrer grossen Vorzüge ungeachtet unter uns noch so wenig bekannt, dass eine etwas ausführlichere Darstellung derselben schon lange als ein dringendes Bedürfniss erkannt worden ist.

Diese Wissenschaft hat der gesammten Mathematik eine neue Gestalt gegeben, und sie zu kennen ist unerlässlich, um die Werke der Neueren zu verstehen, durch welche unsere Kenntnisse in diesem Felde in einem so hohen Grade bereichert worden sind.

Als Descartes die glückliche Idee fasste, die krummen Linien durch Gleichungen auszudrücken, und so die Algebra auf die Geometrie anzuwenden, gab er der letzten Wissenschaft eine Eleganz in ihrem Vortrage, und eine Allgemeinheit in ihren Resultaten, die bey der früheren Behandlungsart nicht zu erreichen war. Diese Vorzüge wurden von seinen Nachfolgern bald aner-

kannt, von Newton, Leibnitz, Euler u. a. weiter ausgebildet, und sie sind jetzt von den Geometern so allgemein angenommen, dass sie keiner Empfehlung mehr bedürfen.

Allein es gab noch eine weit innigere Verbindung der Analysis mit der Geometrie, und diese aufzufinden, und dadurch eine zweyte neue Epoche der Wissenschaft zu begründen, war unsern Zeiten vorbehalten, und die grossen Verdienste, welche sich Lagrange, Laplace und besonders Monge in diesem Felde erworben haben, würden allein schon hinreichen, diesen vortrefflichen Männern den Dank der Nachwelt zu sichern.

Ohne der Achtung, welche der schönen synthetischen Methode der Alten gebührt, zu nahe zu treten, darf man behaupten, dass die analytische Geometrie, das Werk der Neueren, in Beziehung auf Einfachheit der Behandlung, auf Symmetrie der Ausdrücke und auf Allgemeinheit in den durch sie erhaltenen Wahrheiten, jene weit hinter sich zurücklässt. Während ferner in dem synthetischen Vortrage der Geometrie, durch die Bemühungen der besten Köpfe aller Nationen seit beynahe zwey Jahrtausenden den spätern Nachfolgern nur wenig mehr hinzuzufügen übrig bleibt, öffnet sich hier ein neues, grosses, bisher nur

wenig bearbeitetes Feld von interessanten Entdeckungen, ein Feld, dessen Fruchtbarkeit so gross ist, dass man meistens nur, wie diess, obschon in einem weit geringeren Grade, bey den Aufgaben der Algebra zu geschehen pflegt, die gegebene Frage in die Sprache dieser neuen Wissenschaft zu übersetzen braucht, um aus ihr, wie aus einer unerschöpflichen Quelle, nicht nur die gesuchte Antwort, sondern oft auch zugleich eine Anzahl anderer Auflösungen, anderer unbekannter, selbst unerwarteter Wahrheiten hervorgehen zu sehen. Diese Wahrheiten, und diess ist nicht einer der geringsten Vorzüge der analytischen Geometrie, erscheinen zugleich in den erhaltenen Resultaten in einer sehr einfachen und schönen symmetrischen Form ausgedrückt, wenn man anders durch gehörige Auswahl der unbekannten Grössen, durch schickliche Elimination und durch zweckmässige Anordnung der ganzen Behandlung gleich in der anfänglichen Stellung der Frage auf jene Vortheile Bedacht genommen hat, wovon man in dem gegenwärtigen Werke mehr als ein Beyspiel finden wird. In ihrem schönsten Lichte endlich zeigt sich die analytische Geometrie in den Anwendungen, welche man von ihr auf die Mechanik und Astronomie gemacht hat, da es in diesen beyden Wissenschaften unmöglich gewesen wäre, ohne der Hülfe jenes

vortrefflichen Instrumentes einen Mechanismus zu durchdringen, der eben so zusammengesetzt in seinen Wirkungen erscheint, als er einfach in seinen Ursachen ist.

Ich hoffe daher, durch dieses Werk den mit jenen Gegenständen noch weniger bekannten Lesern nützlich zu werden.

Wien den 18. July 1822.

Der Verfasser.

Erstes Capitel.

Gerade Linien.

I. Gerade Linien in einer Ebene.

1. §. Die Lage eines Punctes in einer gegebenen Ebene ist bekannt, wenn die Lage dieses Punctes gegen zwey fixe, in dieser Ebene gegebene, nicht parallele Gerade bekannt ist. Man nennt diese fixen Geraden die *Achsen* der Coordinaten; die Geraden selbst, welche durch den Punct auf jede dieser Achsen, parallel mit der andern Achse, gezogen werden, die *Coordinaten* des Punctes, und endlich den Durchschnittspunct der Achsen den *Anfangspunct* der Coordinaten.

Am einfachsten wird diese Bestimmung der Lage eines Punctes, wenn der Winkel, unter welchem sich die beyden Coordinaten-Achsen schneiden, ein rechter ist, eine Voraussetzung, die wir im Folgenden immer beybehalten werden, wenn nicht das Gegentheil ausdrücklich erinnert wird.

Wir wollen eine dieser beyden Coordinaten des Punctes durch x, und die andere durch y bezeichnen, so dass also x die senkrechte Entfernung des Punctes von der Achse der y, und y die senkrechte Entfernung des Punctes von der Achse der x ist. Kennt man daher diese Entfernungen $x = a$, $y = b$ für irgend einen Punct, so ist auch die Lage dieses Punctes in der Ebene bekannt, oder diese Lage des Punctes ist durch die beyden Gleichungen gegeben

$$\left.\begin{array}{l} x = a \\ y = b \end{array}\right\}.$$

Liegt der Punct auf der anderen Seite der Achse der x, so ist y negativ, und liegt er auf der anderen Seite der Achse der y, so ist x negativ.

Die erste dieser Gleichungen allein genommen, oder die Gleichung x = a gehört also für alle Puncte, deren Entfernung von der Achse der y gleich der constanten Grösse a ist. Dieser Puncte gibt es unendlich viele, und sie liegen alle in einer auf die Achse der x senkrechten Geraden, die von der ihr parallelen Achse der y um die Grösse a entfernt ist, d. h. also x = a ist die Gleichung einer auf die Achse der x senkrechten Geraden, deren Entfernung vom Anfangspuncte der Coordinaten gleich a ist. Eben so ist daher auch y = b die Gleichung einer auf die Achse der y senkrechten Geraden, deren Entfernung vom Anfangspuncte gleich b ist. Beyde Gleichungen zusammen betrachtet, werden daher für den Punct gehören, der jenen beyden Geraden gemeinschaftlich ist, oder die beyden Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} x = a \\ y = b \end{array}\right\}$$

werden für den Durchschnittspunct jener beyden Geraden gehören, wie zuvor.

Eben so sind x = o, y = b die Gleichungen eines Punctes in der Achse der y; und x = a, y = o die eines Punctes in der Achse der x; und x = o, y = o die Gleichungen des Durchschnittspunctes beyder Achsen, oder die Gleichungen des Anfangspunctes der Coordinaten, so wie die einzige Gleichung x = o die der Achse der y, und die einzige Gleichung y = o die der Achse der x ist.

2. §. Dasselbe Verfahren, welches wir angewendet haben, die Lage eines Punctes, oder die Aufeinanderfolge von Puncten, die in einer der Achsen parallelen Geraden liegen, zu bestimmen, werden wir nun auch anwenden können, um die Folge einer Reihe von Puncten zu bestimmen, die nach irgend einer gegebenen

Richtung fortgehen. Ist das Gesetz dieses Fortganges durch eine Gleichung zwischen den Coordinaten ausgedrückt, so wird sich daraus die Folge jener Puncte in der Ebene bestimmen, oder die gerade Linie verzeichnen lassen; und umgekehrt, ist diese Gerade in der Ebene auf irgend eine Art gegeben, so wird sich daraus die Gleichung derselben zwischen den Coordinaten x, y, und beständigen Grössen ableiten lassen. Sey z. B. die Gleichung gegeben

$$y = ax + b \ldots (1)$$

wo a und b constante Grössen sind. Setzt man in dieser Gleichung $x = 0$, so hat man $y = b$; und setzt man $y = 0$, so hat man

$$x = -\frac{b}{a}.$$

Nimmt man daher auf der Achse der y einen Punct, der von dem Anfangspuncte der Coordinaten um die Grösse b entfernt ist; und nimmt man auf der Achse der x, und zwar auf der negativen Seite derselben, einen zweyten Punct, der vom Anfange der Coordinaten um die Grösse $\frac{b}{a}$ entfernt ist, so wird die gesuchte Gerade, deren Gleichung $y = ax + b$ ist, durch jene zwey Puncte gehen, und dadurch ihrer Lage nach vollständig bestimmt seyn.

Ist aber umgekehrt die Gerade in der Ebene gegeben, so seyen $-A$ und B die Entfernungen des Anfangspunctes der Coordinaten von den Puncten, wo die Gerade resp. von den Achsen der x, und der y geschnitten wird. Nennt man dann x und y die Coordinaten irgend eines andern Punctes der Geraden, so ist wegen der Ähnlichkeit der Dreyecke

$$\frac{A}{B} = \frac{A - x}{y} \text{ oder}$$

$$\frac{x}{A} + \frac{y}{B} = 1$$

die gesuchte Gleichung der Geraden, welche in die Gleichung (1) übergeht, wenn $A = -\frac{b}{a}$ und $B = b$ ist, und woraus zugleich folgt, dass $-\frac{B}{A}$, d. h. dass die Grösse a die trigonometrische Tangente des Winkels ist, den die Gerade mit der Achse der x bildet. Bezeichnet man diesen Winkel durch $(1.x)$, und eben so den Winkel der Geraden mit der Achse der y durch $(1.y)$, so ist

$$a = \text{tg.}\ (1.x) = \text{Cotg.}\ (1.y)$$

und die Gleichung der Geraden

$$y = x\ \text{tg.}\ (1.x) + b, \text{ oder}$$
$$y\ \text{Cos}\ (1.x) - x\ \text{Cos}\ (1.y) = b\ \text{Cos}\ (1.x).$$

Das Vorhergehende reicht hin, eine grosse Anzahl von Aufgaben aufzulösen, von denen wir einige der vorzüglichsten kurz anführen wollen.

3. §. Man suche die Gleichung einer Geraden, die durch zwey gegebene Puncte geht.

Sind x' y' die Coordinaten des einen, und x'', y'' die des andern dieser zwey Puncte, und $y = ax + b$ die Gleichung der gesuchten Geraden, so wird, da diese Gerade durch den ersten Punct gehen muss, ihre angenommene Gleichung auch dann noch wahr seyn, wenn man x in x', und y in y' verwandelt, wodurch man erhält

$$y' = ax' + b,$$

und eben so wird man, da die Gerade noch durch den zweyten Punct gehen muss, erhalten

$$y'' = ax'' + b.$$

Die beyden letzten Bedingungsgleichungen der Aufgabe reichen hin, die Werthe von a und b zu bestimmen, welche dann in der Gleichung $y = ax + b$ substituirt, für die Gleichung der gesuchten Curve geben

$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x')$$

Ist einer dieser beyden Puncte der Anfang der Coordinaten, so ist $x'' = y'' = 0$, also die gesuchte Gleichung

$$y = \frac{y'}{x'} \cdot x$$

in welcher der constante Theil der Gleichung fehlt, weil x mit y zugleich verschwindet, oder weil die Gerade durch den Anfang der Coordinaten geht.

4. §. Seyen $y = ax + b \ldots (1)$ und $y = a'x + b' \ldots (2)$ die Gleichungen zweyer gegebenen Geraden. Wir wollen der Kürze wegen die erste die Linie (1), und die zweyte die Linie (2) nennen. Man suche den Winkel (1.2), unter welchem sich diese Geraden schneiden.

Behält man die Bezeichnung des §. 2 bey, und nennt (1.x), (2.x) den Winkel der ersten und zweyten Geraden mit der Achse der x, so hat man

$a = \text{tg.}\,(1.x)$ und $a' = \text{tg.}\,(2.x)$, also auch

$$\text{tg.}\,(1.2) = \text{tg.}\,[(2.x) - (1.x)] = \frac{\text{tg.}\,(2.x) - \text{tg.}\,(1.x)}{1 + \text{tg.}\,(2.x)\,\text{tg.}\,(1.x)}$$

und daher

$$\text{tg.}\,(1.2) = \frac{a' - a}{1 + a'a} \text{ und } \text{Cos}\,(1.2) = \frac{1 + a'a}{\sqrt{1 + a'^2} \cdot \sqrt{1 + a^2}}$$

I. Sind also die beyden Linien parallel, so ist $(1.2) = 0$, oder $a' = a$, und sind sie unter einander senkrecht, so ist $(1.2) = 90^\circ$, oder $1 + a'a = 0$.

II. Ferner hat man

$$\text{Cos}\,(1.x) = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}} \text{ und } \text{Cos}\,(1.y) = \frac{a}{\sqrt{1 + a^2}}$$

und eben so,

$$\text{Cos}\,(2.x) = \frac{1}{\sqrt{1 + a'^2}} \text{ und } \text{Cos}\,(2.y) = \frac{a'}{\sqrt{1 + a'^2}}$$

und überdiess

$$\left.\begin{array}{l} \text{Cos}^2\,(1.x) + \text{Cos}^2\,(1.y) = 1 \\ \text{Cos}^2\,(2.x) + \text{Cos}^2\,(2.y) = 1 \end{array}\right\} \text{oder}$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{Cos}\,(1.y) = \mathrm{Sin}\,(1.x) \\ \mathrm{Cos}\,(2.y) = \mathrm{Sin}\,(2.x)\end{array}\right\}$$

also auch

$$\mathrm{Cos}\,(1.2) = \mathrm{Cos}\,(1.x)\,\mathrm{Cos}\,(2.x) + \mathrm{Cos}\,(1.y)\,\mathrm{Cos}\,(2.y)$$

Sind daher die Linien (1) und (2) parallel, so ist

$$\mathrm{Cos}\,(1.x)\,\mathrm{Cos}\,(2.x) + \mathrm{Cos}\,(1.y)\,\mathrm{Cos}\,(2.y) = 1,$$

und sind sie senkrecht, so ist:

$$\mathrm{Cos}\,(1.x)\,\mathrm{Cos}\,(2.x) + \mathrm{Cos}\,(1.y)\,\mathrm{Cos}\,(2.y) = 0.$$

Endlich sind auch die Gleichungen (1), (2)

$$y = x\,\frac{\mathrm{Cos}\,(1.y)}{\mathrm{Cos}\,(1.x)} + b$$

$$y = x\,\frac{\mathrm{Cos}\,(2.y)}{\mathrm{Cos}\,(2.x)} + b'$$

5. §. Um den Durchschnittspunct der beyden Geraden zu finden, wird man die Coordinaten x und y in beyden Gleichungen einander gleich setzen, wodurch man für die Coordinaten des Durchschnittspunctes erhält

$$x = \frac{b' - b}{a - a'} \text{ und } y = \frac{a\,b' - a'\,b}{a - a'}$$

Für $a = a'$ sind diese Werthe von x und y unendlich, weil die Geraden parallel sind. (§. 4.)

6. §. Man suche eine Gerade, die durch den Punct $x'\,y'$ geht, und parallel mit der Linie (1) ist.

Ist $y = A\,x + B$ die Gleichung der gesuchten Geraden, so ist nach (§. 3)

$$y' = A\,x' + B,$$

und nach (§. 4)

$$A = a, \text{ also } B = y' - a\,x',$$

und die Gleichung der gesuchten Geraden

$$y - y' = a\,(x - x').$$

7. §. Durch einen gegebenen Punct $x'\,y'$ auf die Gerade (1) eine senkrechte Linie suchen.

$y = A\,x + B$ die Gleichung dieser Senkrechter, so ist (§. 3)

$$y' = A x' + B, \text{ und } (\S.\ 4\ \text{I.})$$

$$aA + 1 = 0,$$

also die Gleichung der gesuchten Senkrechten

$$y - y' = -\frac{1}{a}(x - x')$$

I. Sind $x''\,y''$ die Coordinaten des Durchschnittspunctes dieser beyden Linien, so hat man

$$y'' = a x'' + b$$

$$y'' - y' = -\frac{1}{a}(x'' - x')$$

woraus man folgende Werthe von x'' und y'' erhält

$$x'' - x' = \frac{(y' - a x' - b)\,a}{1 + a^2}$$

$$y'' - y' = -\frac{(y' - a x' - b)}{1 + a^2}$$

Heisst endlich P die Länge der gesuchten Senkrechten, welche zwischen dem gegebenen Puncte und der Geraden (1), d. h. welche zwischen den beyden Puncten enthalten ist, deren Coordinaten $x'\,y'$ und $x''\,y''$ sind, so ist

$$P = \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2}$$

oder wenn man in diesem Ausdrucke die vorhergehenden Werthe von $x'' - x'$, $y'' - y'$ substituirt

$$P = \frac{y' - a x' - b}{\sqrt{1 + a^2}}.$$

II. Durch einen gegebenen Punct $x'\,y'$ eine Gerade zu ziehen, welche mit (1) einen gegebenen Winkel (v) macht. Da die gesuchte Gerade durch den Punct $x'\,y'$ geht, so ist ihre Gleichung von der Form (§. 3)

$$y - y' = A\,(x - x')$$

wo A durch die Gleichung (§. 4)..... $\text{tg. } v = \frac{A - a}{1 + A a}$ bestimmt wird. Die gesuchte Gerade ist also

$$y - y' = (x - x')\left(\frac{a + \text{tg. } v}{1 - a\,\text{tg. } v}\right)$$

Sollen beyde Geraden auf einander senkrecht ste-

hen, so ist v = 90, also die Gleichung der gesuchten Geraden

$$y - y' = -\frac{1}{a}(x - x')$$

wie zuvor.

8. §. Ein Winkel ist gegeben: man suche einen Punct zwischen den Seitenlinien dieses Winkels, von welchem die Lothe auf jene zwey Seitenlinien sich wie m zu n verhalten.

Ist a die Tangente des gegebenen Winkels, der Scheitel desselben der Anfangspunct der Coordinaten, und eine der beyden Seitenlinien die Achse der x, so ist die Gleichung der andern Seitenlinie, da sie durch den Anfang der Coordinaten geht,

$$y = ax$$

und das Loth von dem gegebenen Punct, dessen Coordinaten x′ y′ seyn sollen, auf diese zweyte Seitenlinie (§. 7)

$$-\frac{(y' - ax')}{\sqrt{1 + a^2}}.$$

Man hat daher

$$\frac{ax' - y'}{\sqrt{1 + a^2}} : y' = m : n, \text{ oder}$$

$$y' = \frac{an \cdot x'}{n + m\sqrt{1 + a^2}}$$

woraus also folgt, dass unendlich viele Puncte der Aufgabe Genüge thun, und dass alle diese Puncte in einer Geraden liegen, die durch den Anfang der Coordinaten geht, und mit der Achse der x einen Winkel bildet, dessen Tangente

$$\frac{an}{n + m\sqrt{1 + a^2}} \text{ ist.}$$

Wäre der gegebene Punct *ausser* den Schenkeln des Winkels, so würde man in den vorhergehenden Ausdrücken m negativ nehmen.

I. Es sey eine Anzahl von Puncten in einer Ebene

gegeben: man suche in derselben Ebene die Lage einer Geraden, welche die Eigenschaft hat, dass die Summe der Lothe, welche von jenen Puncten auf diese Gerade gezogen werden, jedes Loth durch eine gegebene Zahl multiplicirt, gleich Null sey.

Es sey $y = Ax + B$ die Gleichung der gesuchten Geraden, und α, β, die Coordinaten des ersten Punctes, so ist das Loth von diesem Puncte auf die Gerade gleich

$$\frac{\beta - \alpha A - B}{\sqrt{1 + A^2}}$$

Wir wollen m die Zahl nennen, mit welcher dieses erste Loth multiplicirt werden soll, und für die andern Puncte und Lothe die Grössen α, β, m mit einem, zwey, drey Strichen bezeichnen, so ist

$$\frac{m(\beta - \alpha A - B) + m'(\beta' - \alpha' A - B) + m''(\beta'' - \alpha'' A - B) +}{\sqrt{1 + A^2}} = 0$$

oder wenn man der Kürze wegen

$\Sigma m\alpha = m\alpha + m'\alpha' + m''\alpha'' +$ u. s. w. setzt,

$$\Sigma m\beta - A . \Sigma m a = \Sigma . mB,$$

und diess ist die gesuchte Bedingungsgleichung der Aufgabe, aus welcher sich eine der beyden Grössen A oder B bestimmen lässt. Man sieht also, dass die Aufgabe unbestimmt ist, und unendlich viele Gerade der Aufgabe genug thun, deren Gleichungen alle sind

$$y = \frac{x(\Sigma m\beta - \Sigma . mB)}{\Sigma m\alpha} + B$$

wo die Grösse B willkührlich ist. Um die Aufgabe bestimmt zu machen, werden wir also noch eine Bedingung hinzufügen müssen, z. B. dass die gesuchte Linie durch den Anfang der Coordinaten gehen soll, wo $B = 0$, also

$$A = \frac{\Sigma m\beta}{\Sigma m\alpha}$$

und daher die Gleichung der gesuchten Linie ist:

$$y = \frac{x . \Sigma m\beta}{\Sigma m\alpha}$$

Soll die Summe der Lothe selbst verschwinden, so ist: $m = m' = m'' \ldots$ also die Gleichung der gesuchten Linie

$$y = \frac{x \cdot \Sigma\beta}{\Sigma\alpha} \quad \text{oder}$$

$$y = \frac{(\beta + \beta' + \beta'' +)}{\alpha + \alpha' + \alpha'' +} \cdot x$$

9. §. Eine Anzahl von Puncten ist gegeben. Man suche einen andern Punct so, dass die Summe der Quadrate der Entfernungen dieses Punctes von allen gegebenen Puncten gleich einem gegebenen Quadrate Q^2 sey.

Sind α, β die Coordinaten des ersten gegebenen Punctes, α', β' die des zweyten, α'', β'' die des dritten u. s. f. und sind x, y die Coordinaten des gesuchten Punctes, so hat man für die Quadrate der Linien, welche den gesuchten Punct mit dem ersten, zweyten, dritten gegebenen Puncte verbinden,

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2$$
$$(x - \alpha')^2 + (y - \beta')^2$$
$$(x - \alpha'')^2 + (y - \beta'')^2 \text{ u. s. f.}$$

Addirt man alle diese Quadrate, und setzt der Kürze wegen $\Sigma\alpha = \alpha + \alpha' + \alpha'' +$

$$\Sigma\beta = \beta + \beta' + \beta'' +$$
$$\Sigma\alpha^2 = \alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 +$$
$$\Sigma\beta^2 = \beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2 +$$

so erhält man, wenn n die Anzahl der gegebenen Puncte ist:

$$x^2 + y^2 - \frac{2x}{n} \cdot \Sigma\alpha - \frac{2y}{n} \cdot \Sigma\beta = \frac{Q^2 - \Sigma\alpha^2 - \Sigma\beta^2}{n}$$

woraus folgt, dass wieder unendlich viele Puncte der Aufgabe Genüge thun, und dass alle diese Puncte in der Peripherie eines Kreises liegen. Sind nähmlich A, B, die Coordinaten des Mittelpunctes eines Kreises, dessen Halbmesser R ist, so hat man bekanntlich für die Gleichung des Kreises,

$$(x - A)^2 + (y - B)^2 = R^2$$

und vergleicht man diesen Ausdruck mit der vorhergehenden Gleichung, so findet man für den Kreis, dessen Peripherie alle unsere gesuchten Puncte enthält, die Coordinaten des Mittelpunctes

$$A = \frac{1}{n} . \Sigma\alpha$$

$$B = \frac{1}{n} . \Sigma\beta$$

und den Halbmesser

$$R = \frac{1}{n} . \sqrt{n\,(Q^2 - \Sigma . \alpha^2 - \Sigma . \beta^2) + (\Sigma\,\alpha)^2 + (\Sigma\beta)^2}.$$

10. §. Durch zwey gegebene Puncte Gerade ziehen, die auf einander senkrecht sind.

Sind α, β, die Coordinaten des ersten Punctes, und α', β' die des zweyten, so ist die Linie durch den ersten dieser Puncte

$$y - \beta = A\,(x - \alpha)$$

und die durch den zweyten Punct (4. §. I.)

$$y - \beta' = - \frac{1}{A}\,(x - \alpha')$$

Da der Durchschnittspunct beyden Linien gemeinschaftlich ist, so wird für diesen Punct x und y in den beyden vorhergehenden Gleichungen denselben Werth haben. Diess vorausgesetzt, kann man aus beyden Gleichungen die Grösse A eliminiren, wodurch man für den Ort des Durchschnittspunctes erhält

$$x^2 + y^2 - (\alpha + \alpha')\,x - (\beta + \beta')\,y + \alpha\alpha' + \beta\beta' = 0.$$

Es gibt also wieder unzählige Durchschnittspuncte der beyden Senkrechten, und sie liegen alle in der Peripherie eines Kreises, dessen Coordinaten des Mittelpunctes

$$A = \frac{\alpha + \alpha'}{2} \text{ und } B = \frac{\beta + \beta'}{2}$$

und dessen Halbmesser ist:

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{(\alpha - \alpha')^2 + (\beta - \beta')^2}.$$

I. Durch zwey gegebene Puncte Gerade ziehen, welche einen gegebenen Winkel v unter einander bilden.

Man kann, ohne der Allgemeinheit der Aufgabe Eintrag zu thun, annehmen, dass die gegebenen zwey Puncte in der Achse der x, und der erste im Anfange der Coordinaten liege. Ist dann b die Distanz dieser beyden Puncte, so ist die Gleichung der Linie, die durch den Anfang geht, $y = ax$ und die Gerade, die durch den Punct $y = o$, $x = b$ geht, ist

$$y = -a'(x - b), \text{ also auch (§. 4)}$$

$$\text{tg. } v = \frac{-a - a'}{1 - aa'} \text{ oder } a = \frac{a' + \text{tg. } v}{a' \text{tg. } v - 1}$$

Substituirt man diesen Werth von a in der Gleichung $y = ax$, so hat man:

$$y = \frac{x(a' + \text{tg. } v)}{a' \text{tg. } v - 1}.$$

Eliminirt man aber die Grösse a' aus dieser, und aus der Gleichung $y = -a'(x - b)$, so hat man für den Ort des Durchschnittspunctes der gesuchten Geraden:

$$x^2 + y^2 - bx - \frac{by}{\text{tg. } v} = o$$

woraus folgt, dass alle Durchschnittspuncte M, welche der Aufgabe genug thun, in der Peripherie eines Kreises liegen, von dem die Coordinaten des Mittelpunctes

$$A = \tfrac{1}{2}b, \; B = \tfrac{1}{2}b \text{ Cotg. } v,$$

und der Halbmesser

$$R = \frac{b}{2 \text{ Sin } v} \text{ ist.}$$

Für $v = 90°$ ist $x^2 + y^2 - bx = o$; übereinstimmend mit dem Vorhergehenden.

II. Eine gerade Linie von gegebener Länge bewege sich so, dass ihre Endpuncte immer auf den Schenkeln eines rechten Winkels liegen. Man suche die Curve, welche ein gegebener Punct dieser geraden Linie während der Bewegung der letzten beschreibt.

Ist a die Entfernung des gegebenen Punctes von dem senkrechten Schenkel des rechten Winkels, und b die

Entfernung desselben von dem andern Schenkel, und sind $x' y'$ die Coordinaten des gegebenen Punctes, wo x' in dem horizontalen Schenkel des rechten Winkels liegt, so hat die Gleichung der beweglichen geraden Linie die Form

$$y - y' = A (x - x').$$

Also sind die Coordinaten des obern Endpunctes dieser Geraden $x = o$ und $y = y' - Ax'$, und die des unteren Endpunctes $y = o$ und $x = \frac{Ax' - y'}{A}$.

Diess vorausgesetzt hat man

$$a = \sqrt{A^2 x'^2 + x'^2} \text{ oder } A^2 = \frac{a^2 - x'^2}{x'^2}$$

und eben so

$$b = \sqrt{y'^2 + \frac{y'^2}{A^2}} \text{ oder } A^2 = \frac{y'^2}{b^2 - y'^2}$$

Setzt man beyde Werthe von A^2 einander gleich, so erhält man für die gesuchte Curve

$$a^2 y'^2 + b^2 x'^2 = a^2 b^2$$

die Gleichung einer Ellipse, deren halbe Achsen a und b sind.

Dasselbe Resultat wird man auch erhalten, wenn der Winkel, auf welchem sich die Endpuncte der Geraden bewegen, irgend ein schiefer Winkel ist, nur sind dann a und b die sogenannten conjugirten Halbmesser der Ellipse.

III. Wenn an dem unteren Endpuncte dieser beweglichen Geraden, deren Länge m seyn soll, eine auf diese Gerade senkrechte Linie von gegebener Länge n errichtet wird, so suche man die Curve, welche der Endpunct dieser Linie n während der Bewegung jener Geraden beschreibt.

Sind $x' y'$ die Coordinaten dieses Endpunctes, den Anfang der Coordinaten in dem Scheitel des unbeweglichen rechten Winkels vorausgesetzt, und ist x'' die

Abscisse des unteren Endpunctes der beweglichen Geraden, so ist

$$x' - x'' = \sqrt{n^2 - y'^2}$$

also die Gleichung der Linie n

$$y = \frac{y'}{\sqrt{n^2 - y'^2}} \cdot (x - x'')$$

und die Gleichung der auf n senkrechten Linie m, die ebenfalls durch den Punct geht, dessen Abscisse x'' ist,

$$y = -\frac{\sqrt{n^2 - y'^2}}{y'} \cdot (x - x'')$$

Setzt man in der letzten Gleichung $x = 0$, so erhält man

$$y = \frac{x''\sqrt{n^2 - y'^2}}{y'},$$ also auch die Länge der ersten Linie

$$m = \sqrt{\frac{x''^2 (n^2 - y'^2)}{y'^2} + x''^2}$$

und die der zweyten

$$n = \sqrt{y'^2 + (x' - x'')^2}$$

Die beyden letzten Gleichungen lassen sich auch so ausdrücken

$$x'' = \frac{m}{n} y' \text{ und } x'' = x' \pm \sqrt{n^2 - y'^2}$$

Setzt man diese Werthe von x'' einander gleich, so erhält man für die gesuchte Curve die Gleichung

$$\frac{m y'}{n} = x' \pm \sqrt{n^2 - y'^2}$$ einer Ellipse.

11. §. Man suche den Mittelpunct eines Kreises, dessen Peripherie durch einen gegebenen Punct geht, und eine der Achsen der Coordinaten berührt.

Sind α, β, die Coordinaten des gegebenen Punctes, und x', y' die gesuchten Coordinaten des Mittelpunctes des Kreises, dessen Halbmesser r ist, so ist die Gleichung des Kreises

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 = r^2.$$

Da dieser Kreis durch den gegebenen Punct gehen soll, so ist $(\alpha - x')^2 + (\beta - y')^2 = r^2$ und da er die Achse der y berühren soll, so ist

$$x' = r.$$

Man hat daher für den Ort des Mittelpunctes

$$(\alpha - x')^2 + (\beta - y')^2 = x'^2$$

oder

$$y'^2 - 2\beta y' - 2\alpha x' + \alpha^2 + \beta^2 = 0$$

die Gleichung einer Parabel, in welcher also alle Mittelpuncte der Kreise liegen, welche der Aufgabe genug thun. Für $\beta = 0$ d. h. wenn der gegebene Punct in der Achse der x liegt, hat man

$$y'^2 = 2\alpha x' - \alpha^2$$

12. §. Man suche den Mittelpunct und den Halbmesser eines Kreises, der drey andere ihrer Lage und Grösse nach gegebene Kreise berührt.

Es seyen x, y, die unbekannten Coordinaten des Mittelpunctes des gesuchten Kreises, und R der Halbmesser desselben. Die gegebenen Coordinaten des Mittelpunctes des ersten Kreises seyen a, b, und r der Halbmesser desselben. Für den zweyten und dritten Kreis wollen wir die Grössen a, b, r, mit einem und mit zwey Strichen bezeichnen.

Da für zwey von aussen oder von innen sich berührende Kreise die Distanz ihrer Mittelpuncte gleich der Summe oder der Differenz ihrer Halbmesser ist, so hat man

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = (R + r)^2$$
$$(x - a')^2 + (y - b')^2 = (R + r')^2$$
$$(x - a'')^2 + (y - b'')^2 = (R + r'')^2.$$

Welche Ausdrücke für äussere Berührungen gelten: für innere ist r, r', r'' negativ. Diese drey Gleichungen reichen hin, die drey unbekannten Grössen x, y, R zu finden. Die Elimination bequemer zu machen, kann man, ohne der Allgemeinheit der Aufgabe Eintrag zu thun, annehmen, dass der Mittelpunct des ersten der

gegebenen Kreise im Anfange der Coordinaten liege, wodurch a = b = o wird. Legt man dann die Achse der Ordinate x durch den Mittelpunct des zweyten Kreises, so wird auch b' = o. Da wir auf die Elimination dieser Gleichungen in dem zweyten Capitel wieder zurückkommen werden, so wollen wir die Auflösung der gegenwärtigen Aufgabe auf eine andere, einfachere Art versuchen.

Da die drey Kreise ihrer Lage nach gegeben sind, so sind auch die geraden Linien gegeben, welche ihre Mittelpuncte verbinden, so wie die Winkel, welche von diesen Linien eingeschlossen werden. Es sey also A die Entfernung der Mittelpuncte des ersten und zweyten, B die des zweyten und dritten Kreises, und α der Winkel zwischen A und B im Mittelpuncte des zweyten Kreises.

Verbindet man die Mittelpuncte dieser drey Kreise mit dem Mittelpuncte des gesuchten Kreises durch drey gerade Linien, so gehen diese Linien durch die Berührungspuncte der Kreise, und ihre Werthe sind

$$R + r,\ R + r',\ R + r''.$$

Nennt man aber φ den Winkel, welchen die Linien A und $R + r'$ am Mittelpuncte des zweyten Kreises bilden, so hat man

$$(R + r)^2 = A^2 + (R + r')^2 - 2A(R + r')\,\mathrm{Cos}\,\varphi$$
$$(R + r'')^2 = B^2 + (R + r')^2 - 2B(R + r')\,\mathrm{Cos}\,(\alpha - \varphi).$$

Die erste dieser Gleichungen gibt

$$R = \frac{A^2 + r'^2 - r^2 - 2Ar'\,\mathrm{Cos}\,\varphi}{2(r - r' + A\,\mathrm{Cos}\,\varphi)}$$

und die zweyte

$$R = \frac{B^2 + r'^2 - r''^2 - 2Br'\,\mathrm{Cos}\,(\alpha - \varphi)}{2(r'' - r' + B\,\mathrm{Cos}\,(\alpha - \varphi))}$$

Setzt man beyde Werthe von R einander gleich, so ist:

$$A(r' - r'' + B)(r' - r'' - B)\,\mathrm{Cos}\varphi - B(r - r' + A)(r - r' - A)\,\mathrm{Cos}(\alpha - \varphi) =$$
$$(B^2 + r'^2 - r''^2)(r - r') + (A^2 + r'^2 - r^2)(r' - r''),$$

woraus man den Werth von φ leicht findet. Stellt man nähmlich die letzte Gleichung zur Abkürzung so dar:

$$m \operatorname{Cos} \varphi - n \operatorname{Cos.} (\alpha - \varphi) = p$$

und setzt

$$\operatorname{tg.} \beta = \frac{m - n \operatorname{Cos} \alpha}{n \operatorname{Sin} \alpha}$$

so ist $\operatorname{Sin} (\beta - \varphi) = \frac{p . \operatorname{Cos} \beta}{n \operatorname{Sin} \alpha}$

und wenn φ bekannt ist, so findet man R aus einer der beyden vorhergehenden Gleichungen.

Soll der gesuchte Kreis bloss durch drey Puncte gehen, so kann man dafür die Mittelpuncte der drey vorigen Kreise annehmen, oder in den vorhergehenden Ausdrücken

$$r, r' \text{ und } r'' \text{ gleich}$$

Null setzen.

Sucht man endlich den Halbmesser R, und die Coordinaten x, y, des Kreises, der drey ihrer Lage nach gegebene Gerade

$$y = a x + b$$
$$y = a' x + b'$$
$$y = a'' x + b''$$

berührt, so wird man (§. 7) haben

$$\frac{y - a x - b}{\sqrt{1 + a^2}} = R$$

$$\frac{y - a' x - b'}{\sqrt{1 + a'^2}} = R$$

$$\frac{y - a'' x - b''}{\sqrt{1 + a''^2}} = R$$

so dass die gesuchten Werthe von x und y durch die folgenden Gleichungen bestimmt werden,

$$(m' - m) y + (a' m - a m') x + b' m - b m' = 0$$
$$(m'' - m) y + (a'' m - a m'') x + b'' m - b m'' = 0$$

wenn $m^2 = 1 + a^2$, $m'^2 = 1 + a'^2$ und $m''^2 = 1 + a''^2$ ist.

13. §. Projection eines gegebenen Punctes auf eine

Linie, oder auf eine Ebene ist, der Punct, in welchem eine durch den gegebenen Punct auf diese Linie oder Ebene gezogene Senkrechte diese Linie oder Ebene trifft. Projection einer gegebenen Linie auf eine Linie oder Ebene ist die Linie, welche zwischen den Projectionen der Endpuncte der gegebenen Linie auf die Linie oder Ebene enthalten ist. Projection einer gegebenen Figur auf eine Ebene ist die Ebene, welche zwischen den Projectionen der Seitenlinien der gegebenen Figur auf die Ebene enthalten ist.

Ist also a eine gegebene Gerade, deren Neigung gegen eine andere Gerade oder gegen eine Ebene gleich n ist, so ist a Cos n die Projection der gegebenen Geraden a auf jene Gerade oder auf jene Ebene. Ist eben so a die Fläche einer von geraden oder krummen Linien begränzten Figur, deren Neigung gegen eine Ebene gleich n ist, so ist wieder a Cos n die Projection der Figur auf diese Ebene.

Die Projection einer Seite eines geschlossenen Polygons auf eine Gerade, ist gleich der Summe der Projectionen aller anderen Seiten dieses Polygons auf dieselbe Gerade, nach ihrer Lage die einen positiv, die anderen negativ genommen, selbst dann, wenn die Seiten des Polygons nicht alle in derselben Ebene liegen; oder mit anderen Worten: Jede Seite eines Polygons ist gleich der Summe aller übrigen Seiten, jede in den Cosinus des Winkels multiplicirt, den diese Seite mit der ersten Seite bildet. Daraus folgt, dass, wenn zwey Polygone eine gemeinschaftliche Seite haben, die Summe der Projectionen aller übrigen Seiten auf eine Gerade bey beyden Polygonen gleich gross ist.

Eine Reihe gerader, an ihren Endpuncten zusammenhängender Linien a, a′, a″, a‴ ist gegeben. Man suche die rechtwinklichten Coordinaten der Durchschnittspuncte dieser Linien, wenn der erste Punct der Linie a der Anfangspunct der Coordinaten ist, und wenn

die gegebenen Winkel, welche a mit der Achse der x, und a mit a', a' mit a'', a'' mit a''' bildet, in derselben Ordnung b, b', b'', b''' sind.

Sind x, y die Coordinaten des Endpunctes der Linie a
x' y' - - - - - - a'
x'' y'' - - - - - - a''

u. f. und ist ω', ω'', ω''', ... der Winkel der Linie a', a'', a''' . . . mit der Achse der x, so sind die Projectionen:

auf die Achse der x . . . auf die Achse der y

von a gleich $x = a \operatorname{Cos} b$ $y = a \operatorname{Sin} b$

a' . . . $x' = x + a' \operatorname{Cos} \omega'$. . $y' = y + a' \operatorname{Sin} \omega'$

a'' . . . $x'' = x' + a'' \operatorname{Cos} \omega''$. $y'' = y' + a'' \operatorname{Sin} \omega''$

a''' . . . $x''' = x'' + a''' \operatorname{Cos} \omega'''$. $y''' = y'' + a''' \operatorname{Sin} \omega'''$ u. f.

Allein man sieht leicht, dass zwischen den Winkeln b, b', b'', . . . und ω, ω', ω'', . . . folgende Gleichungen Statt haben.

$$b' + b - \omega' = 180$$
$$b'' + \omega' - \omega'' = 180$$
$$b''' + \omega'' - \omega''' = 180$$
$$b'''' + \omega''' - \omega'''' = 180 \text{ u. f.}$$

also ist $\omega' = b + b' - 180$,

oder $\omega' = 180 + b + b'$

$$\omega'' = b + b' + b''$$
$$\omega''' = 180 + b + b' + b'' + b'''$$
$$\omega^{IV} = b + b' + b'' + b''' + b^{IV}$$
$$\omega^{V} = 180 + b + b' + b'' + b''' + b^{IV} + b^{V}.$$

Also auch für den Durchschnittspunct der Linie $a^{(n)'}$ mit $a^{(n+1)'}$

$$X = x^{(n)'} = a \operatorname{Cos} b - a' \operatorname{Cos}(b + b') + a'' \operatorname{Cos}(b + b' + b'') - a''' \operatorname{Cos}(b + b' + b'' + b''') + \ldots \ldots \pm a^{(n)} \operatorname{Cos}(b + b' + b'' \ldots + b^{n})$$

$$Y = y^{(n)'} = a \operatorname{Sin} b - a' \operatorname{Sin}(b + b') + a'' \operatorname{Sin}(b + b' + b'') - a''' \operatorname{Sin}(b + b' + b'' + b''') + \ldots \ldots \pm a^{(n)} \operatorname{Sin}(b + b' + b'' \ldots + b^{n}).$$

Nennt man aber $-\alpha'$, $-\alpha''$, $-\alpha'''$ in dersel-

ben Ordnung die Winkel, welche die rückwärts verlängerte Seite

a' mit a
a'' mit a'
a''' mit a'' bildet, u. f.

so hat man $\omega' = b + \alpha'$

$\omega'' = \omega' + \alpha'' = b + \alpha' + \alpha''$

$\omega''' = \omega'' + \alpha''' = b + \alpha' + \alpha'' + \alpha'''$ u. f.

also auch, wenn man $\alpha = b$ setzt,

$\alpha' = 180 + b'$

$\alpha'' = 180 + b''$

$\alpha''' = 180 + b'''$ u. f. und

$X = a \cos\alpha + a' \cos(\alpha + \alpha') + a'' \cos(\alpha + \alpha' + \alpha'') +$

$Y = a \sin\alpha + a' \sin(\alpha + \alpha') + a'' \sin(\alpha + \alpha' + \alpha'') +$

Kehrt die Reihe der Linien $a\ a'\ a''$.. wieder zurück, so dass der Endpunct der letzten dieser Linien in den Anfangspunct der ersten Linie a falle, so bilden diese Linien $a\ a'\ a''$ ein geschlossenes Polygon, und da der Anfang der Coordinaten zugleich der Anfang der Linie a ist, so hat man für jedes Polygon

$$\left.\begin{aligned} 0 &= a \cos\alpha + a' \cos(\alpha + \alpha') + a'' \cos(\alpha + \alpha' + \alpha'') + \\ 0 &= a \sin\alpha + a' \sin(\alpha + \alpha') + a'' \sin(\alpha + \alpha' + \alpha'') + \end{aligned}\right\} \text{(I)}$$

Die beyden Gleichungen (I) enthalten die Auflösung aller Polygone.

So ist für das *Viereck*, da $\alpha + \alpha' + \alpha'' + \alpha''' = 360°$ ist,

$0 = a \cos\alpha + a' \cos(\alpha + \alpha') + a'' \cos\alpha''' + a'''$

$0 = a \sin\alpha + a' \sin(\alpha + \alpha') - a'' \sin\alpha'''$.

Für das Fünfeck ist eben so

$$\alpha + \alpha' + \alpha'' + \alpha''' + \alpha^{IV} = 360$$

also

$$0 = a \cos\alpha + a' \cos(\alpha + \alpha') + a'' \cos(\alpha + \alpha' + \alpha'') + a''' \cos\alpha^{IV} + a^{IV}$$

$$0 = a \sin\alpha + a' \sin(\alpha + \alpha') + a'' \sin(\alpha + \alpha' + \alpha'') - a''' \sin\alpha^{IV} \text{ u. s. f.}$$

II. Gerade Linien im Raume.

14. §. Um die Lage eines Punctes im Raume überhaupt zu bestimmen, zieht man in diesem Raume drey unter einander senkrechte Ebenen, deren Ort man als gegeben annimmt. Sind dann die Lothe von dem Puncte auf jene senkrechten Ebenen bekannt, so ist auch die Lage jenes Punctes bekannt. Man nennt diese drey Lothe, die wir mit x, y, z bezeichnen wollen, die *Coordinaten* des Punctes, jene drey Ebenen die coordinirten Ebenen, und die drey Durchschnittslinien je zweyer dieser Ebenen die *Achsen der Coordinaten*, so dass die Ordinate x senkrecht steht auf der Ebene, welche die Achsen der y und z enthält, d. h. senkrecht auf der Ebene der y z, und eben so y senkrecht auf der Ebene der x z, und z senkrecht auf der Ebene der x y. Der Durchschnittspunct endlich der drey coordinirten Ebenen, oder der drey Achsen, heisst auch hier der Anfang der Coordinaten.

Sind also die drey Coordinaten eines Punctes bekannt, und

$$\left.\begin{array}{l} x = a \\ y = b \\ z = c \end{array}\right\}$$

so sind diese Ausdrücke auch die Gleichungen jenes Punctes.

Die erste dieser Gleichungen $x = a$ allein gehört für alle Puncte, deren Entfernung von der coordinirten Ebene der yz gleich a ist. Dieser Puncte gibt es unendlich viele, und sie liegen alle in einer Ebene, die von der ihr parallelen Ebene der yz um die Grösse a entfernt ist. Eben so ist $y = b$ die Gleichung einer der xz parallelen Ebene, und $z = c$ die Gleichung einer der xy parallelen Ebene; also auch $x = o$ die Gleichung der coordinirten Ebene der yz, und $y = o$ die

Gleichung der Ebene der x z, so wie $z = o$ die Gleichung der Ebene der x y.

Betrachtet man aber die beyden ersten Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} x = a \\ y = b \end{array}\right\}$$

zusammen genommen, so gehören diese Gleichungen für alle Puncte, welche den beyden Ebenen, deren eine der y z und die andere der x z parallel ist, gemeinschaftlich sind, d. h. sie gehören für die auf der Ebene x y senkrechte Durchschnittslinie dieser beyden Ebenen, oder für eine der Achse der z parallele Linie. Eben so sind $x = a$, $z = c$ die Gleichungen einer der Achse der y parallelen Linie, und $y = b$, $z = c$ die Gleichungen einer der Achse der x parallelen Linie, also auch

$x = o$, $y = o$ die Gleichungen der Achse der z
$x = o$, $z = o$ - - - - - y
$y = o$, $z = o$ - - - - - x

so wie endlich $x = o$, $y = o$, $z = o$ die drey Gleichungen des Anfangspunctes der Coordinaten.

I. Hat man überhaupt zwischen den drey Coordinaten x, y, z eines Punctes nur eine Gleichung, so ist dadurch die Lage dieses Punctes noch nicht bestimmt, und der Ort aller Puncte, die der Gleichung genügen, wird irgend eine Fläche seyn, welche durch jene Gleichung bestimmt wird.

Hat man zwey Gleichungen zwischen den drey Coordinaten eines Punctes, so wird auch dadurch die Lage des Punctes noch nicht völlig bestimmt, und der Ort aller Puncte, die den beyden Gleichungen genügen, wird der Durchschnitt der zwey Flächen seyn, von welchen jede durch eine dieser beyden Gleichungen bestimmt wird, oder die beyden Gleichungen werden für eine gerade oder krumme Linie gehören.

Hat man aber drey Gleichungen zwischen den drey Coordinaten eines Punctes, so wird dadurch die Lage dieses Punctes vollkommen bestimmt. Er ist nähm-

lich der Durchschnittspunct der drey Flächen, oder der Punct, der den drey Flächen gemeinschaftlich zukommt, von welchen jede durch eine jener drey Gleichungen bestimmt wird.

Ein Punct wird also durch drey, eine Linie durch zwey, und eine Fläche durch eine Gleichung zwischen den drey rechtwinkeligen Coordinaten bestimmt.

15. §. Nachdem wir so die Lage eines Punctes im Raume durch seine Coordinaten bestimmt haben, wollen wir nun die Relationen aufsuchen, die zwischen den Coordinaten einer Reihe von Puncten Statt haben müssen, die in einer geraden Linie liegen.

Zu diesem Zwecke wollen wir bemerken, dass, wenn mehrere Puncte im Raume in einer geraden Linie liegen, auch die Projectionen dieser Puncte in irgend einer der drey coordinirten Ebenen in einer geraden Linie, nähmlich in derjenigen Geraden liegen werden, die der Durchschnitt der coordinirten Ebene mit einer Ebene ist, die durch die erste Gerade senkrecht auf die coordinirte Ebene geht.

Diese gerade Linie wird also gegeben seyn, wenn zwey Ebenen gegeben sind, die beyde durch die Gerade gehen, und deren jede auf einer der drey coordinirten Ebenen senkrecht steht.

Die Gleichung einer Geraden, die z. B. in der Ebene der xz liegt, hat nach dem Vorhergehenden die Form

$$x = az + \alpha,$$

die also von dem Werthe der Grösse y unabhängig ist. Allein wenn man den Raum nach allen seinen Dimensionen betrachtet, so gehört diese Gleichung nicht mehr für eine Linie, sondern (nach §. 14) für eine Ebene, die durch jene Gerade in xz, senkrecht auf die Ebene der xz geht, denn für alle Puncte dieser Ebene hat dieselbe Gleichung Statt. Eben so wird also auch

$$y = bz + \beta$$

die Gleichung einer Ebene seyn, welche senkrecht auf der

Ebene der yz steht, und durch eine Gerade in dieser Ebene geht, deren Gleichung $y = bz + \beta$ ist.

Beyde Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} x = az + \alpha \\ y = bz + \beta \end{array}\right\}$$

zusammen genommen, werden daher für den Durchschnitt dieser beyden auf xz und yz senkrechten Ebenen gehören, d. h. sie werden für eine Gerade im Raume gehören, von welcher $x = az + \alpha$ die Projection (§. 13) in xz und $y = bz + \beta$ die Projection in yz ist.

Die Projection dieser Geraden endlich auf die dritte Ebene der xy ist durch die beyden vorigen bestimmt, so wie die Gleichung dieser Projection durch die Gleichungen der beyden ersten Projectionen gegeben ist. Eliminirt man nähmlich z aus den beyden vorhergehenden Gleichungen, so hat man für die Projection in xy die Gleichung

$$y - \beta = \frac{b}{a}(x - \alpha)$$

Daraus folgt, dass die Gleichungen einer Geraden, die in einer der xy parallelen Ebene liegt, die Form haben werden:

$$\begin{array}{l} y = Ax + B \\ z = C \end{array}$$

wo A, B, C constante Grössen sind. Liegt die Gerade in der Ebene der xy selbst, so sind ihre Gleichungen

$$\begin{array}{l} y = Ax + B \\ z = 0. \end{array}$$

16. §. Man suche die Gleichungen einer Geraden, die durch zwey gegebene Puncte geht.

Seyen x' y' z' die Coordinaten des einen der gegebenen Puncte, und x'' y'' z'' die des andern. Die Gleichungen der gesuchten Geraden werden die Form haben

$$\begin{array}{l} x = az + \alpha \\ y = bz + \beta \end{array}$$

wo die vier Constanten a, b, α, β, durch die Bedingungen der Aufgabe zu bestimmen sind.

Da die Gerade durch den Punct $x' y' z'$ gehen muss, so müssen die beyden vorhergehenden Gleichungen auch dann noch wahr seyn, wenn man in ihnen x' y' z' statt x y z setzt. Man hat daher

$$x' = a z' + \alpha$$
$$y' = b z' + \beta$$

und eben so hat man, da die Gerade auch durch den Punct $x'' y'' z''$ gehen muss,

$$x'' = a z'' + \alpha$$
$$y'' = b z'' + \beta$$

Diese vier Bedingungsgleichungen reichen hin, die Werthe der vier Grössen a b α β zu bestimmen. Substituirt man dann diese Werthe in den beyden ersten Gleichungen, so erhält man für die Gleichungen der gesuchten Geraden, welche durch die zwey gegebenen Puncte geht,

$$x - x' = \frac{x' - x''}{z' - z''} (z - z')$$
$$y - y' = \frac{y' - y''}{z' - z''} (z - z')$$

und die Entfernung dieser beyden Puncte ist:

$$\sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + (z'' - z')^2}$$

17. §. Wir wollen künftig, der Kürze wegen, die Gerade, deren Gleichungen sind

$$\left.\begin{array}{l} x = a z + \alpha \\ y = b z + \beta \end{array}\right\} (1)$$

die Linie 1, und die Gerade, deren Gleichungen sind

$$\left.\begin{array}{l} x = a' z + \alpha' \\ y = b' z + \beta' \end{array}\right\} (2)$$

die Linie 2 nennen.

Man sieht, dass diese beyden Geraden unter einander parallel seyn werden, wenn ihre Projectionen in x z und y z unter einander parallel sind, d. h. nach (§. 4)

wenn $a = a'$ und $b = b'$ ist, und dass jede von ihnen, z. B. die erste durch den Anfang der Coordinaten gehen wird, wenn die Projectionen derselben durch den Anfang gehen, d. h. (§. 3) wenn $\alpha = \beta = 0$ ist.

Diess vorausgesetzt, wollen wir den Winkel (1 . 2) suchen, welchen die beyden Geraden 1 und 2 mit einander bilden.

Dieser Winkel wird offenbar derselbe seyn, den zwey Gerade bilden, deren jede mit einer der gegebenen Geraden 1, 2 parallel ist, und deren beyde durch den Anfang gehen. Die Gleichungen dieser Geraden werden aber seyn:

$$\left.\begin{array}{l} x = a z \\ y = b z \end{array}\right\} \text{für die erste, und}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = a' z \\ y = b' z \end{array}\right\} \text{für die zweyte.}$$

Man nehme auf jeder dieser zwey Geraden einen Punct, dessen Entfernung vom Anfange der Coordinaten gleich der Einheit ist, so ist die Distanz D dieser zwey Puncte

$$D = 2 \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2} (1 . 2) = \sqrt{2 - 2 \operatorname{Cos} (1 . 2)}.$$

Sind aber x' y' z' und x'' y'' z'' die Coordinaten dieser zwey Puncte, so ist auch

$$D = \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + (z'' - z')^2}$$

Substituirt man in dem letzten Ausdrucke von D die Werthe von x' x''...

$$\begin{array}{ll} x' = a z' \text{ und } & x'' = a' z'' \\ y' = b z' & y'' = b' z'' \end{array}$$

so erhält man

$$D^2 = (a^2 + b^2 + 1) z'^2 + (a'^2 + b'^2 + 1) z''^2$$
$$- 2 (a a' + b b' + 1) z' z''.$$

Es ist aber nach der Voraussetzung:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$$
$$x''^2 + y''^2 + z''^2 = 1 \text{ das heisst}$$

$$(a^2 + b^2 + 1)\, z'^2 = 1$$

$$(a'^2 + b'^2 + 1)\, z''^2 = 1 \text{, also ist:}$$

$$D^2 = 2 - 2\,(a a' + b b' + 1)\, z' z'' \text{ oder}$$

$$D^2 = 2 - \frac{2\,(a a' + b b' + 1)}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}\,.\,\sqrt{a'^2 + b'^2 + 1}}$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem vorhergehenden

$$D^2 = 2 - 2 \operatorname{Cos}(1.2)$$

so hat man $\operatorname{Cos}(1.2) = \frac{a a' + b b' + 1}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}\,.\,\sqrt{a'^2 + b'^2 + 1}}$

I. Sind also die beyden Geraden 1, 2 parallel, so ist $(1.2) = 0$, also auch, wenn man die letzte Gleichung quadrirt, und $\operatorname{Cos}(1.2) = 1$ setzt,

$$(a' - a)^2 + (b' - b)^2 + (a b' - a' b)^2 = 0$$

Die Summe dieser drey Quadrate kann aber nur dann Null seyn, wenn man hat

$$a = a'$$

$$b = b'$$

$$a b' = a' b$$

und von diesen Gleichungen ist die dritte eine Folge der beyden ersten. Der Parallelismus der beyden Linien wird daher durch die zwey Bedingungsgleichungen gegeben

$a = a'$ und $b = b'$ wie zuvor.

II. Sind aber die beyden Geraden auf einander senkrecht, so ist $\operatorname{Cos}(1.2) = 0$, also auch

$$1 + a a' + b b' = 0$$

Allein zwey Gerade im Raume können auf einander senkrecht seyn, ohne sich zu schneiden. Sollen sich daher die Linien 1 und 2 in einem Puncte schneiden, dessen Coordinaten x y z sind, so wird man die vier Gleichungen (1) und (2) als zusammen bestehend betrachten. Eliminirt man dann aus ihnen die drey Grössen x y z, so erhält man die Gleichung

$$\frac{a - a'}{b - b'} = \frac{\alpha - \alpha'}{\beta - \beta'}$$

welche die Relation zwischen den Constanten a α.... enthält, der Genüge geschehen muss, wenn beyde Linien sich schneiden sollen.

III. Da die Gleichungen der Achse der x sind $y=0$, $z=0$, so erhält man den Cosinus des Winkels (1.x) der Linie 1 mit der Achse der x, wenn man in dem vorhergehenden Ausdrucke von Cos (1.2) setzt

$(1.2)=(1.x)$ und $b'=\frac{1}{a'}=0$, wodurch man erhält

$$\text{Cos}\,(1.x)=a:\sqrt{1+a^2+b^2}$$

Ist eben so (1.y) und (1.z) der Winkel der Linie 1 mit der Achse der y und z, so ist:

$\text{Cos}\,(1.y)=b:\sqrt{1+a^2+b^2}$ und $\text{Cos}\,(1.z)=1:\sqrt{1+a^2+b^2}$ also auch

$$\text{Cos}^2(1.x)+\text{Cos}^2(1.y)+\text{Cos}^2(1.z)=1$$

und diese Ausdrücke sind zugleich in derselben Ordnung die Sinus der Winkel, welche die Linie 1 mit den coordinirten Ebenen der yz, xz und xy bildet.

IV. Bezeichnet man auf dieselbe Art durch (2.x), (2.y), (2.z) die Winkel der Linie 2 mit den Achsen der x, y, z, so ist:

$\text{Cos}\,(2.x)=a':\sqrt{1+a'^2+b'^2}$, $\text{Cos}(2.y)=b':\sqrt{1+a'^2+b'^2}$,

$$\text{Cos}\,(2.z)=1:\sqrt{1+a'^2+b'^2}$$

und aus diesen doppelten Ausdrücken folgt sofort:
$\text{Cos}\,(1.2)=\text{Cos}\,(1.x)\,\text{Cos}\,(2.x)+\text{Cos}\,(1.y)\,\text{Cos}\,(2.y)+\text{Cos}\,(1.z)\,\text{Cos}\,(2.z)$.

Sind also die Linien 1 und 2 senkrecht, so ist
$\text{Cos}\,(1.x)\,\text{Cos}\,(2.x)+\text{Cos}\,(1.y)\,\text{Cos}\,(2.y)+\text{Cos}\,(1.z)\,\text{Cos}\,(2.z)=0$.

Endlich sind auch die Gleichungen der Linie 1

$$x=z.\frac{\text{Cos}\,(1.x)}{\text{Cos}\,(1.z)}+\alpha,\quad y=z.\frac{\text{Cos}\,(1.y)}{\text{Cos}\,(1.z)}+\beta$$

und die der Linie 2

$$x=z.\frac{\text{Cos}\,(2.x)}{\text{Cos}\,(2.z)}+\alpha',\quad y=z.\frac{\text{Cos}\,(2.y)}{\text{Cos}\,(2.z)}+\beta'$$

18. §. Durch einen gegebenen Punct $x'\ y'\ z'$ eine Gerade ziehen, die mit der Linie 1 parallel ist.

Seyen die Gleichungen der gesuchten Geraden

$$x = a'z + \alpha',\quad y = b'z + \beta'$$

so hat man nach den Bedingungen der Aufgabe (§. 17)

$$a' = a,\ \text{und}\ b' = b,\ \text{und}$$

$$x' = a'z' + \alpha',\quad y' = b'z' + \beta',$$

also sind die Gleichungen der gesuchten Linie

$$x - x' = a\,(z - z')$$

$$y - y' = b\,(z - z')$$

I. Durch einen gegebenen Punct $x'\ y'\ z'$ eine Gerade ziehen, die auf der Linie 1 senkrecht steht.

Es seyen die gesuchten Gleichungen der auf 1 senkrechten Linie

$$x = Az + A',\quad y = Bz + B'.$$

Da diese Senkrechte durch den Punct $x'\ y'\ z'$ gehen muss, so ist

$$x' = Az' + A',\quad y' = Bz' + B'$$

und da sie auf 1 senkrecht seyn soll, so ist (§. 17 II.)

$$1 + aA + bB = 0.$$

Da sich endlich beyde Linien schneiden sollen, so ist (a. a. O.)

$$\frac{a - A}{b - B} = \frac{\alpha - A'}{\beta - B'}.$$

Eliminirt man aus diesen sechs Gleichungen die Grössen A, B, A', B', so erhält man die beyden Gleichungen der gesuchten auf 1 senkrechten Linie.

Die vier ersten Gleichungen geben

$$A = \frac{x - x'}{z - z'} \qquad B = \frac{y - y'}{z - z'}$$

Substituirt man diese Werthe von A, B in der fünften Gleichung, so ist $a\,(x - x') + b\,(y - y') + z - z' = 0$. . (a)

Substituirt man aber die Werthe von A' und B' aus den beyden ersten Gleichungen in der sechsten, so ist

$$\frac{a - A}{b - B} = \frac{\alpha - x' + Az'}{\beta - y' + Bz'}$$

oder, wenn man in diesem Ausdrucke die vorhergehenden Werthe von A und B substituirt,

$$(x - x')(y' - bz' - \beta) - (y - y')(x' - az' - \alpha) + (z - z')[b(x' - \alpha) - a(y' - \beta)] = o \ldots (b)$$

und die beyden Gleichungen (a), (b) sind die der gesuchten auf 1 senkrechten Linie. Man kann ihnen leicht andere Formen geben, aber wir werden im zweyten Capitel wieder auf diese Gleichungen zurückkommen.

19. §. Man suche eine Gerade, welche durch die beyden Linien 1, 2 geht, und auf jeder derselben senkrecht steht.

Es seyen die Gleichungen der gesuchten Senkrechten

$$x = Az + C$$
$$y = Bz + D$$

Die Bedingung, dass sie durch die beyden gegebenen Geraden geht, gibt §. 17 II.

$$(a - A)(\beta - D) - (\alpha - C)(b - B) = o$$
$$(a' - A)(\beta' - D) - (\alpha' - C)(b' - B) = o$$

und die Bedingung, dass sie auf den beyden gegebenen Geraden senkrecht steht, gibt:

$$1 + aA + bB = o$$
$$1 + a'A + b'B = o$$

Diese vier Bedingungsgleichungen werden durch Elimination die gesuchten Werthe von A B C D geben. Setzt man der Kürze wegen

$$m = a - a' + b(ab' - a'b)$$
$$m' = a - a' + b'(ab' - a'b)$$
$$n = b - b' - a(ab' - a'b)$$
$$n' = b - b' - a'(ab' - a'b)$$
$$p = (a - a')^2 + (b - b')^2 + (ab' - a'b)^2$$

so findet man

$$A = \frac{b - b'}{ab' - a'b}, \quad B = -\frac{(a - a')}{ab' - a'b}$$

$$C = \frac{mn'\alpha - m'n\alpha' - nn'(\beta' - \beta)}{(ab' - a'b)\,p}$$

$$D = \frac{mn'\beta' - m'n\beta + mm'(\alpha' - \alpha)}{(ab' - a'b)\,p}$$

20. §. Eine Anzahl n von Puncten ist gegeben. Man suche einen andern Punct so, dass, wenn man von diesem Puncte zu allen gegebenen Puncten gerade Linien zieht, die Summe aller Quadrate dieser Geraden gleich einem gegebenen Quadrate Q^2 ist.

Sind $\alpha\ \beta\ \gamma$ die drey Coordinaten des ersten gegebenen Punctes; $\alpha'\ \beta'\ \gamma'$ die des zweyten u. f., und x y z die des gesuchten Punctes, und verfährt man wie (§. 9), so erhält man, wenn man die dort gebrauchten Bezeichnungen beybehält, für den gesuchten Punct:

$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{2x}{n} . \Sigma\alpha - \frac{2y}{n} . \Sigma\beta - \frac{2z}{n} . \Sigma\gamma = \frac{Q^2 - \Sigma\alpha^2 - \Sigma\beta^2 - \Sigma\gamma^2}{n}$$

woraus folgt, dass alle Puncte, welche der Aufgabe genug thun, die der Oberfläche einer Kugel sind.

Die Kugel ist nähmlich eine solche Fläche, deren Puncte alle von einem gegebenen Puncte, dem Mittelpuncte, dieselhe Entfernung haben. Nennt man R diese constante Entfernung, den Halbmesser der Kugel, und A, B, C die Coordinaten des Mittelpunctes, so wie x, y, z die Coordinaten irgend eines Punctes der Oberfläche der Kugel, so ist die Entfernung dieser beyden Puncte

$$\sqrt{(x-A)^2 + (y-B)^2 + (z-C)^2}$$

und da diese Entfernung für alle Puncte gleich R seyn muss, so ist:

$$(x-A)^2 + (y-B)^2 + (z-C)^2 = R^2$$

die Gleichung der Kugel.

Vergleicht man damit den vorhergehenden Ausdruck, so findet man, dass die Coordinaten des Mittelpunctes der gesuchten Kugel sind

$$A = \frac{1}{n} . \Sigma\alpha,\ B = \frac{1}{n} . \Sigma\beta,\ C = \frac{1}{n} . \Sigma\gamma$$

und dass der Halbmesser derselben ist

$$R = \frac{1}{n} \sqrt{n(Q^2 - \Sigma\alpha^2 - \Sigma\beta^2 - \Sigma\gamma^2) + (\Sigma\alpha)^2 + (\Sigma\beta)^2 + (\Sigma\gamma)^2}.$$

Vergleiche (§. 9).

Da man die Grösse Q immer so bestimmen kann, dass der Halbmesser R jener Kugel einen gegebenen Werth erhält, so wird die Summe der Quadrate aller Linien, welche die gegebenen Puncte mit irgend einem Puncte der Peripherie der Kugel verbinden, die man aus dem gefundenen Mittelpunct mit einem *willkührlichen* Halbmesser gezogen hat, immer von *einerley Grösse* seyn.

II. Hätte man, um die Lage eines Punctes im Raume durch Beobachtungen zu bestimmen, durch eine erste Beobachtung die Coordinaten α β γ dieses Punctes, durch eine zweyte die α' β' γ', durch eine dritte die α'' β'' γ'' u. f., wo alle diese Grössen gewissen unvermeidlichen Beobachtungsfehlern unterworfen sind, und nimmt man an, dass die *wahren*, unbekannten Coordinaten dieses Punctes x y z sind, so kann man die Distanz des Punctes α β γ von dem wahren Punct x y z als den Fehler der ersten Beobachtung ansehen, welche Distanz ist

$$\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2}.$$

Eben so wird die Distanz des Punctes α' β' γ' von dem Puncte x y z oder der Fehler der zweyten Beobachtung seyn

$$\sqrt{(x-\alpha')^2 + (y-\beta')^2 + (z-\gamma')^2}$$

und der Fehler der dritten Beobachtung

$$\sqrt{(x-\alpha'')^2 + (y-\beta'')^2 + (z-\gamma'')^2} \text{ u. f.}$$

Man nehme nun an, dass die Summe U der Quadrate aller dieser Fehler, oder dass die Grösse

$$\begin{aligned} U = {} & (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 \\ & (x-\alpha')^2 + (y-\beta')^2 + \\ & (x-\alpha'')^2 + \end{aligned}$$

ein Minimum sey, so hat man bekanntlich

$$\left(\frac{dU}{dx}\right) = 0 \quad \left(\frac{dU}{dy}\right) = 0 \quad \left(\frac{dU}{dz}\right) = 0$$

wo $\left(\frac{dU}{dx}\right)$ das Differential von U bloss in Beziehung auf x, und durch dx dividirt, bezeichnet.

Entwickelt man diese Differentialien, so gibt das erste

$(x - \alpha) + (x - \alpha') + (x - \alpha'') + = 0$ oder $x = \frac{1}{n} . \Sigma \alpha$

und eben so geben die beyden anderen

$$y = \frac{1}{n} . \Sigma \beta$$

$$z = \frac{1}{n} . \Sigma \gamma$$

welches dieselben Werthe sind, die wir oben für die Coordinaten A, B, C des Mittelpunctes der Kugel gefunden haben. Diese Werthe von x y z sind aber die sogenannten arithmetischen Mittel der durch die Beobachtungen gefundenen Coordinaten; so ist

$$\frac{1}{n} \Sigma \alpha = \frac{\alpha + \alpha' + \alpha'' + ..}{n}$$

und es ist bekannt, dass die arithmetischen Mittel in der That im Allgemeinen die wahrscheinlichsten Werthe der Beobachtungen sind. Man findet daher die wahrscheinlichsten Werthe der Grössen, die man aus mehreren unter sich gleich guten Beobachtungen erhalten hat, wenn die Summe der Quadrate jedes einzelnen Beobachtungsfehlers ein Minimum ist.

III. Man kann noch bemerken, dass diese Werthe von A, B, C zugleich die Coordinaten des Schwerpunctes des Systemes sind, welches aus den gegebenen Puncten besteht. Heisst nähmlich p das Gewicht des ersten Punctes, dessen Coordinaten x y z sind, und bezeichnet man für den zweyten, dritten Punct diese Grössen mit einem, zwey Strichen u. f.; heisst ferner P das Gewicht des ganzen Systemes, und sind A B C die Coordinaten seines Schwerpunctes, so hat man bekanntlich $P . A = px + p'x' + p''x'' ... = \Sigma px$ und eben so $P . B = \Sigma py$, $P . C = \Sigma pz$.

Setzt man aber die Gewichte aller Puncte einander gleich, so ist $p = p' = p'' \ldots$ und $P = n p$, wenn n die Anzahl der Puncte bezeichnet, also werden die vorhergehenden Ausdrücke:

$$np \cdot A = p \cdot \Sigma x \text{ oder } A = \frac{1}{n} \cdot \Sigma x$$

$$B = \frac{1}{n} \cdot \Sigma y$$

$$C = \frac{1}{n} \cdot \Sigma z$$

welches dieselben Ausdrücke sind, die wir oben für den Mittelpunct der Kugel erhalten haben, wenn man $x\,y\,z$ in $\alpha\;\beta\;\gamma$ verwandelt. So ist bekanntlich $dx \,.\, dy \,.\, dz$ das Element eines Körpers von irgend einer Gestalt, welcher Ausdruck, wenn die Masse des ganzen Körpers homogen ist, zugleich das Gewicht p dieses Elementes bezeichnen kann. Das Gewicht des ganzen Körpers wird dann seyn:

$$P = \iiint dx\, dy\, dz$$

und die drey Gleichungen

$$A = \frac{1}{P} \cdot \Sigma p x$$

$$B = \frac{1}{P} \cdot \Sigma p y$$

$$C = \frac{1}{P} \cdot \Sigma p z$$

werden in folgende übergehen

$$A = \frac{\iiint x \,.\, dx\, dy\, dz}{\iiint dx\, dy\, dz}$$

$$B = \frac{\iiint y \,.\, dx\, dy\, dz}{\iiint dx\, dy\, dz}$$

$$C = \frac{\iiint z \,.\, dx\, dy\, dz}{\iiint dx\, dy\, dz}$$

welches die bekannten Ausdrücke der Coordinaten des Schwerpunctes eines Körpers sind, und aus welchen sich die Coordinaten des Schwerpunctes einer Fläche oder eines Bogens leicht ableiten lassen.

Zweytes Capitel.

Ebenen.

1. §. Wenn eine Gerade sich mit sich selbst parallel und so bewegt, dass sie immer durch eine andere feste Gerade geht, so beschreibt die erste Gerade eine Ebene. Daraus folgt der analytische Ausdruck oder die Gleichung der Ebene. Ist nähmlich die bewegliche Linie anfangs in der Ebene der xz, so sind ihre Gleichungen:

$$z = ax + \alpha$$
$$y = o.$$

Es sey die zweyte, feste Gerade in der Ebene der yz, also ihre Gleichungen:

$$z = by + \alpha$$
$$x = o$$

wo α in beyden Gleichungen denselben Werth haben muss, weil sich beyde Geraden in der Axe der z schneiden. Da die bewegliche Gerade sich immer parallel bleibt, so sind ihre allgemeinen Gleichungen für irgend eine Lage dieser Geraden:

$$z = ax + P$$
$$y = Q$$

und da sie in jeder ihrer Lagen die feste Gerade schneidet, so ist (Cap. I.):

$$P = bQ + \alpha.$$

Substituirt man diesen Werth von P in den vorhergehenden Gleichungen, so erhält man die Gleichungen der beweglichen Geraden in irgend einer ihrer Lagen:

$$z = ax + bQ + \alpha$$
$$y = Q,$$

und diese Lage hängt von dem Werthe ab, welchen

man der willkührlichen Grösse Q gibt. Will man daher die Gleichung der beweglichen Geraden unabhängig von Q, das heisst, will man den analytischen Ausdruck dieser Geraden für *alle* ihre Lagen, welcher Ausdruck nichts anders als die *Ebene* ist, welche durch diese bewegliche Gerade beschrieben wird, so wird man die Grösse Q aus den beyden vorhergehenden Gleichungen eliminiren, wodurch man erhält:

$$z = ax + by + \alpha.$$

Die allgemeine Gleichung der Ebene enthält also nur die ersten Potenzen der Coordinaten x, y, z, und hat die Form:

$$Ax + By + Cz + D = o \ldots . (I.),$$

wo von den vier constanten Grössen A, B, C, D eine willkührlich ist.

Verbindet man diese Gleichung mit der folgenden

$$z = o$$

welches (Cap. I.) die Gleichung der coordinirten Ebene der xy ist, so gehören beyde Gleichungen

$$\left.\begin{array}{r} Ax + By + D = o \\ z = o \end{array}\right\}$$

für die gerade Linie, in welcher sich die Ebene I und die Ebene der xy schneidet. Man kann diese Linie die *Knotenlinie* der Ebene I in der Ebene der xy nennen. Eben so sind die Gleichungen der Knotenlinie in xz:

$$\left.\begin{array}{r} Ax + Cz + D = o \\ y = o \end{array}\right\}$$

und die der Knotenlinie in yz:

$$\left.\begin{array}{r} By + Cz + D = o \\ x = o \end{array}\right\}$$

Daraus folgt zugleich, dass:

$\frac{A}{C}$ die Tangente des Winkels der Knotenlinie in xz mit der Achse der x ist, und

$\frac{B}{C}$ die Tangente des Winkels der Knotenlinie in yz mit der Achse der y und

$\frac{A}{B}$ die Tangente des Winkels der Knotenlinie in x y mit der Achse der x ist,

und dass die Entfernung des Anfangspunctes der Coordinaten von dem Puncte, wo die Ebene I

die Achse x schneidet, gleich $-\frac{D}{A}$

. . y $-\frac{D}{B}$

. . z $-\frac{D}{C}$ ist.

2. §. Den Durchschnitt von zwey gegebenen Ebenen zu finden.

Sey die Gleichung der ersten Ebene

$$Ax + By + Cz + D = o \ldots (I.)$$

und die der zweyten

$$A'x + B'y + C'z + D' = o \ldots (II.).$$

Wir wollen der Kürze wegen in der Folge diese Ebenen die Ebenen I und II nennen.

Um die Durchschnittslinie beyder Ebenen zu finden, wird man beyde Gleichungen als coexistirend betrachten, also die Werthe der Coordinaten in der einen Gleichung gleich den Werthen derselben Coordinaten in der andern annehmen. Eliminirt man dann eine dieser Coordinaten, z. B. z, so erhält man:

$$(AC' - A'C)x + (BC' - B'C)y + DC' - D'C = o$$

und diese Gleichung gehört für die Projection der Durchschnittslinie beyder Ebenen in der coordinirten Ebene der x y. Eben so wird man die Projection dieser Durchschnittslinie in x z oder y z finden, wenn man aus den Gleichungen (I), (II) die Grösse y oder x eliminirt.

I. Wenn aber die beyden Ebenen parallel sind, so hat jene Durchschnittslinie nicht mehr Statt. Für diesen Fall kann also der letzten Gleichung durch keinen Werth der Grössen x und y Genüge geschehen, oder die Factoren dieser Grössen müssen jeder für sich gleich Null seyn. Man hat daher, wenn die Ebenen I. II. parallel sind,

$$AC' - A'C = 0 \text{ und } BC' - B'C = 0 \text{ oder}$$

$$\frac{A}{C} = \frac{A'}{C'}, \quad \frac{B}{C} = \frac{B'}{C'}, \text{ also auch } \frac{A}{B} = \frac{A'}{B'}.$$

In der That sind, wenn die letzten Gleichungen Statt haben, die Knotenlinien der beyden Ebenen in den coordinirten Ebenen einander parallel.

II. Sucht man eben so den Durchschnittspunct der Ebene I. mit der Geraden, die wir Cap. I. durch 1 bezeichneten, d. h. mit der Geraden

$$x = az + \alpha$$
$$y = bz + \beta,$$

so wird man diese beyden Gleichungen mit der folgenden

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

als coexistirend betrachten, also aus allen drey Gleichungen die Werthe der Coordinaten x y z des Durchschnittspunctes finden. Eliminirt man z. B. x und y, so erhält man

$$(Aa + Bb + C)z + A\alpha + B\beta + D = 0.$$

Wenn aber die Gerade mit der Ebene I. parallel ist, so ist, wie in I. der Factor von z oder

$$Aa + Bb + C = 0.$$

Soll endlich die Gerade 1 auf der Ebene I. senkrecht stehen, so wird sie auch auf der Knotenlinie dieser Ebene senkrecht stehen, also wird man haben (Cap. I.)

$$a = \frac{A}{C} \text{ und } b = \frac{B}{C}.$$

Soll diese Gerade noch durch den Punct gehen, dessen Coordinaten x' y' z' sind, so sind die Gleichungen dieser auf die Ebene I. senkrechten Geraden

$$x - x' = \frac{A}{C}(z - z')$$

$$y - y' = \frac{B}{C}(z - z').$$

Um den Punct zu finden, wo diese Gerade die Ebene I. trifft, wird man die beyden letzten Gleichungen mit der folgenden

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

als coexistirend betrachten; und aus ihnen die drey Coordinaten x y z des Durchschnittspunctes der Geraden mit der Ebene I. durch Elimination bestimmen.

Man erhält so, wenn man $E = D + Ax' + By' + Cz'$ setzt,

$$x - x' = - \frac{AE}{A^2 + B^2 + C^2}$$

$$y - y' = - \frac{BE}{A^2 + B^2 + C^2}$$

$$z - z' = - \frac{CE}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Endlich ist die Entfernung dieses Durchschnittspunctes von dem gegebenen Puncte, dessen Coordinaten x' y' z' sind, gleich

$$\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$$

oder gleich

$$\frac{E}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{D + Ax' + By' + Cz'}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

3. §. Den Winkel (I. II) finden, welchen die beyden Ebenen I., II. mit einander bilden.

Dieser Winkel der beyden Ebenen ist gleich dem Winkel, welchen zwey gerade Linien bilden, deren jede auf eine jener zwey Ebenen senkrecht steht. Die erste dieser Geraden habe die Gleichungen

$$x = az + \alpha$$

$$y = bz + \beta$$

und die zweyte

$$x = a'z + \alpha'$$

$$y = b'z + \beta'.$$

Damit die erste auf I., und die zweyte auf II. senkrecht sey, wird man (§. 2) haben

$$a = \frac{A}{C}, \; b = \frac{B}{C}, \; a' = \frac{A'}{C'}, \; b' = \frac{B'}{C'}$$

Der Cosinus des Winkels der beyden Geraden ist aber (Cap. I.):

$$\text{Cos (I. II)} = \frac{a a' + b b' + 1}{\sqrt{1 + a^2 + b^2} . \sqrt{1 + a'^2 + b'^2}}$$

also ist der Cosinus des Winkels der beyden Ebenen

$$\text{Cos (I. II)} = \frac{A A' + B B' + C C'}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} . \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}$$

I. Sind daher die beyden Ebenen auf einander senkrecht, so ist

$$A A' + B B' + C C' = 0,$$

und sind sie parallel, so ist

$\frac{A}{C} = \frac{A'}{C'}$ und $\frac{B}{C} = \frac{B'}{C'}$, wie nach dem Vorhergehenden.

II. Wenn von diesen beyden Ebenen die zweyte mit einer der drey coordinirten Ebenen zusammenfällt, so werden zwey der drey Grössen A′ B′ C′ gleich Null. Sind daher (I. xy), (I. xz), (I. yz) die Winkel der Ebene I. mit den coordinirten Ebenen der xy, xz, yz, so ist:

$$\text{Cos (I. xy)} = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \text{Cos (I. xz)} = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\text{Cos (I. yz)} = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

also auch $\text{Cos}^2 \text{(I. xy)} + \text{Cos}^2 \text{(I. xz)} + \text{Cos}^2 \text{(I. yz)} = 1$.

Sind aber (I. x), (I. y), (I. z) in derselben Ordnung die Winkel, welche die Ebene I. mit den Achsen der x, y, z bildet, so ist

Sin (I. x) = Cos (I. yz), Sin (I. y) = Cos (I. xz), Sin (I. z) = Cos (I. xy).

Nennt man eben so (II. xy), (II. xz), (II. yz) die Winkel, welche die Ebene II. mit den coordinirten Ebenen der xy, xz, yz macht, so ist:

$$\text{Cos(II.xy)} = \frac{C'}{\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}} \text{Cos (II. xz)} = \frac{B'}{\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}$$

$$\text{Cos (II. yz)} = \frac{A'}{\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}.$$

also wieder:

$$\mathrm{Cos}^2 (\mathrm{II.}\ xy) + \mathrm{Cos}^2 (\mathrm{II.}\ xz) + \mathrm{Cos}^2 (\mathrm{II.}\ yz) = 1,$$

und überdiess:

$$\mathrm{Cos}\,(\mathrm{I.II.}) = \mathrm{Cos}(\mathrm{I.}\ xy)\mathrm{Cos}(\mathrm{II.}\ xy) + \mathrm{Cos}(\mathrm{I.}\ xz)\mathrm{Cos}(\mathrm{II.}\ xz) + \mathrm{Cos}\,(\mathrm{I.}\ yz)\ \mathrm{Cos}\,(\mathrm{II.}\ yz).$$

III. Den Winkel (I. 1) einer gegebenen geraden Linie 1 mit der Ebene (I.) finden.

Die Gleichungen der Geraden 1 sind:

$$x = az + \alpha,$$
$$y = bz + \beta,$$

also hat man für die Gerade, welche auf der gegebenen Ebene senkrecht steht:

$$x = \frac{A}{C} \cdot z + \alpha'$$
$$y = \frac{B}{C} \cdot z + \beta'.$$

Der Cosinus des Winkels beyder Linien ist

$$\frac{Aa + Bb + C}{\sqrt{1 + a^2 + b^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

und da dieser Winkel den gesuchten Winkel (I. 1) zu einem rechten ergänzt, so ist

$$\mathrm{Sin}\ (\mathrm{I.}\ 1) = \frac{Aa + Bb + C}{\sqrt{1 + a^2 + b^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Sind (1.x), (1.y), (1.z) die Winkel, welche die gegebene Gerade mit den Achsen der z, y, x bildet, und (I. xy), (I. xz), (I. yz) die Winkel, welche die gegebene Ebene I. mit den Ebenen der xy, xz, yz bildet, so ist

$$\mathrm{Cos}\ (1.x) = \frac{a}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}},\ \mathrm{Cos}\ (\mathrm{I.}\ yz) = \frac{A}{A^2 + B^2 + C^2}$$

u. f. also

$$\mathrm{Sin}\,(\mathrm{I.}\ 1) = \mathrm{Cos}\,(\mathrm{I.}\ xy) \cdot \mathrm{Cos}\,(1.z) + \mathrm{Cos}\ (\mathrm{I.}\ xz)\ \mathrm{Cos}\,(1.y) + \mathrm{Cos}\ (\mathrm{I.}\ yz) \cdot \mathrm{Cos}\ (1.x).$$

4. §. Wir wollen nun annehmen, dass die Ebene I durch den Anfangspunct der Coordinaten gehe, oder dass D = o sey, und die verschiedenen Relationen aufsuchen, die zwischen den Neigungen dieser Ebenen ge-

gen die coordinirten Ebenen, gegen die Knotenlinien. etc., und zwischen den constanten Grössen A, B, C Statt haben.

I. Ist also I. xy die Neigung der Ebene I zu der coordinirten Ebene der xy u. f., so ist nach dem Vorhergehenden:

$$\text{Cos}\,(\text{I}.\,xy) = C : \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$
$$\text{Cos}\,(\text{I}.\,xz) = B : \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$
$$\text{Cos}\,(\text{I}.\,yz) = A : \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

II. Bezeichnet man durch $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$ die Knotenlinien der Ebene I in den coordinirten Ebenen der yz, xz, xy, so hat man für die Winkel dieser Knotenlinien mit den Axen der x, y und z:

$$\text{tg.}\,\overline{z}\,.\,x = -\frac{A}{B}$$
$$\text{tg.}\,\overline{x}\,.\,y = -\frac{B}{C}$$
$$\text{tg.}\,\overline{y}\,.\,z = +\frac{C}{A}$$

wenn man nähmlich diese drey Winkel alle in einer und derselben Richtung zählt. Übrigens gibt es noch sechs andere Winkel der Knotenlinien mit den Achsen der Coordinaten, aber drey derselben sind die Complemente der drey oben gegebenen zu rechten Winkeln, und die drey letzten sind selbst rechte Winkel.

Ist $\overline{z}\,.\,\overline{y}$ der Winkel der Knotenlinie der Ebene I. in xy mit der Knotenlinie in xz, so ist

$$\text{tg.}\,\overline{z}\,.\,\overline{y} = \frac{A}{B\,.\,C}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$
$$\text{tg.}\,\overline{z}\,.\,\overline{x} = \frac{B}{A\,.\,C}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$
$$\text{tg.}\,\overline{y}\,.\,\overline{x} = \frac{C}{A\,.\,B}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.$$

III. Zwischen diesen drey Systemen haben schon mehrere merkwürdige Relationen Statt. So hat man:

$$\mathrm{Sin}\,(\overline{z}\,.\,x) = \frac{\mathrm{Cos}\,(I.\,yz)}{\mathrm{Sin}\,(I.\,xy)}$$

$$\mathrm{Sin}\,(\overline{y}\,.\,z) = \frac{\mathrm{Cos}(I.\,xy)}{\mathrm{Sin}\,(I.\,xz)}$$

$$\mathrm{Sin}\,(\overline{x}\,.\,y) = \frac{\mathrm{Cos}(I.\,xz)}{\mathrm{Sin}(I.\,yz)}\text{, oder}$$

$$\mathrm{Cos}\,(\overline{z}.x) = \frac{\mathrm{Cos}(I.\,xz)}{\mathrm{Sin}\,(I.\,xy)}$$

$$\mathrm{Cos}\,(\overline{y}.z) = \frac{\mathrm{Cos}(I.\,yz)}{\mathrm{Sin}\,(I.\,xz)}$$

$$\mathrm{Cos}\,(\overline{x}.y) = \frac{\mathrm{Cos}(I.\,xy)}{\mathrm{Sin}\,(I.\,yz)}.$$

Eben so ist:

$$\mathrm{tg.}\,(\overline{z}\,.\,\overline{y}) = -\frac{\mathrm{Cos}\,(I.\,yz)}{\mathrm{Cos}(I.\,xy)\,\mathrm{Cos}\,(I.\,xz)} = -\frac{\mathrm{tg}\,(\overline{z}\,.\,x)}{\mathrm{Cos}\,(I.\,xy)} = -\frac{\mathrm{Cotg}\,(\overline{y}\,.\,z)}{\mathrm{Cos}\,(I.\,xz)}$$

$$\mathrm{tg.}\,(\overline{x}\,.\,\overline{z}) = -\frac{\mathrm{Cos}\,(I.\,xz)}{\mathrm{Cos}\,(I.\,xy)\,\mathrm{Cos}\,(I.\,yz)} = -\frac{\mathrm{tg.}\,(\overline{x}\,.\,y)}{\mathrm{Cos}\,(I.\,yz)} = -\frac{\mathrm{Cotg}\,(\overline{z}\,.\,x)}{\mathrm{Cos}\,(I.\,xy)}$$

$$\mathrm{tg.}\,(\overline{x}\,.\,\overline{y} = -\frac{\mathrm{Cos}\,(I.\,xy)}{\mathrm{Cos}\,(I.\,xz)\,\mathrm{Cos}\,(I.\,yz)} = -\frac{\mathrm{tg.}\,(\overline{y}\,.\,z)}{\mathrm{Cos}\,(I.\,xz)} = -\frac{\mathrm{Cotg}\,(\overline{x}\,.\,y)}{\mathrm{Cos}\,(I.\,yz)}$$

oder:

$$\mathrm{Sin}\,(\overline{z}\,.\,\overline{y}) = \frac{\mathrm{Cos}\,(I.\,yz)}{\mathrm{Sin}\,(I.\,xy)\,\mathrm{Sin}\,(I.\,xz)}$$

$$\mathrm{Sin}\,(\overline{x}\,.\,\overline{z}) = \frac{\mathrm{Cos}\,(I.\,xz)}{\mathrm{Sin}\,(I.\,xy)\,\mathrm{Sin}\,(I.\,yz)}$$

$$\mathrm{Sin}\,(\overline{x}\,.\,\overline{y}) = \frac{\mathrm{Cos}\,(I.\,xy)}{\mathrm{Sin}\,(I.\,xz)\,\mathrm{Sin}\,(I.\,yz)},$$

Ausdrücke, welche sich mit andern eben so harmonischen vermehren lassen.

IV. Wir wollen nun durch den Anfangspunct der

Coordinaten in der Ebene I eine gerade Linie ziehen, und den Winkel, welchen diese Gerade mit der Knotenlinie in der Ebene I. in (x y) bildet, durch ω, so wie jene Gerade durch R, und ihre Projectionen in yz, xz, und xy resp. durch r, r′ und r″ bezeichnen.

Diess vorausgesetzt, hat man für die Coordinaten des Punctes dieser Geraden, dessen Entfernung vom Anfangspuncte der Cordinaten die Einheit ist, wie man leicht findet:

$$x' = \text{Cos}\,\omega\ \text{Cos}\,(\overline{z}\,.\,x) - \text{Sin}\,\omega\ \text{Sin}\,(\overline{z}\,.\,x)\ \text{Cos}\,(\text{I}.\ xy)$$
$$y' = \text{Cos}\,\omega\ \text{Sin}\,(\overline{z}\,.\,x) + \text{Sin}\,\omega\ \text{Cos}\,(\overline{z}\,.\,x)\ \text{Cos}\,(\text{I}.\ xy)$$
$$z' = \text{Sin}\,\omega\ \text{Sin}\,(\text{I}.\ xy)$$

und die Gleichungen der Projectionen des Radius R werden seyn:

$$yz' - y'z = 0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \text{für } r$$
$$xz' - x'z = 0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; - \; r'$$
$$xy' - x'y = 0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; - \; r''.$$

Sind aber die Gleichungen des Radius und dessen Projectionen bekannt, so wird man aus dem Vorhergehenden leicht die Winkel von R und r, r′, r″ mit den Achsen und Knotenlinien, so wie die Winkel von R mit den drey coordinirten Ebenen bestimmen können. Ist z. B. R . x der Winkel des Radius mit der Achse der x, so hat man

$$\text{Cos}\,(R\,.\,x) = x', \text{ und eben so}$$
$$\text{Cos}\,(R\,.\,y) = y'$$
$$\text{Cos}\,(R\,.\,z) = z'.$$

Ist R . xy die Neigung des Radius gegen die Ebene xy, so ist

$$\text{Sin}\,(R\,.\,xy) = z', \text{ und ferner}$$
$$\text{Sin}\,(R\,.\,xz) = y'$$
$$\text{Sin}\,(R\,.\,yz) = x'.$$

Ist (r″ . x), (r′ . z), (r . y) der Winkel der Projection des Radius in der Ebene xy, xz, yz resp. mit den Achsen der x, z und y, so ist

$$\text{tg.}\ (r''.\ x) = \frac{y'}{x'}$$

$$\text{tg.}\ (r'.\ z) = \frac{x'}{z'}$$

$$\text{tg.}\ (r.\ y) = \frac{z'}{y'}$$

und von den sechs andern hieher gehörenden Winkeln sind drey die Complemente der vorigen zu rechten, und drey sind selbst rechte Winkel.

Ist ferner $R.\overline{z}$, $R.\overline{y}$, $R.\overline{x}$ der Winkel des Radius mit der Knotenlinie in xy, xz, yz, so erhält man:

$$\text{Cos}\ (R.\overline{z}) = \frac{Ay' - Bx'}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$\text{Cos}\ (R.\overline{y}) = \frac{Cx' - Az'}{\sqrt{A^2 + C^2}}$$

$$\text{Cos}\ (R.\overline{x}) = \frac{Bz' - Cy'}{\sqrt{B^2 + C^2}}.$$

Ist endlich $r''.\overline{z}$, $r'.\overline{y}$, $r.\overline{x}$ der Winkel der Projection des Radius in xy, xz, yz resp. mit der Knotenlinie in xy, xz, yz, so erhält man

$$\text{Cos}\ (r''.\overline{z}) = (Ay' - Bx') : \sqrt{(A^2 + B^2)(x'^2 + y'^2)}$$

$$\text{Cos}\ (r'.\overline{y}) = (Cx' - Az') : \sqrt{(A^2 + C^2)(x'^2 + z'^2)}$$

$$\text{Cos}\ (r.\overline{x}) = (Bz' - Cy') : \sqrt{(B^2 + C^2)(y'^2 + z'^2)}.$$

Auch zwischen diesen Systemen gibt es wieder mehrere Verbindungen, von denen ich der Kürze wegen nur einige der vorzüglichsten anzeigen will.

$$\text{Cos}(R.x) = \text{Cos}(r''.x)\text{Cos}(R.xy) = \text{Sin}(r'.z).\text{Cos}(R.xz)$$

$$\text{Cos}(R.y) = \text{Cos}(r.y)\ \text{Cos}(R.yz) = \text{Sin}(r''.x).\text{Cos}(R.xy)$$

$$\text{Cos}(R.z) = \text{Cos}(r'.z)\ \text{Cos}(R.xz) = \text{Sin}(r.y).\text{Cos}(R.yz)$$

$$\text{Cos}\ (R.\overline{z}) = \text{Sin}\ (R.z)\ \text{Cos}\ (r''.x - \overline{z}.x)$$

$$\text{Cos}\ (R.\overline{y}) = \text{Sin}\ (R.y)\ \text{Cos}\ (r'.z - \overline{y}.z)$$

$$\text{Cos}\ (R.\overline{x}) = \text{Sin}\ (R.x)\ \text{Cos}\ (r.y - \overline{x}.y)$$

und da $R.\overline{y} - R.\overline{z} = \overline{z}.\overline{y}$

$R.\overline{z} - R.\overline{x} = \overline{x}.\overline{z}$

$R.\overline{x} - R.\overline{y} = \overline{x}.\overline{y}$ ist, so ist auch:

$$\text{Cos}\,(R.\overline{y} - R.\overline{z}) = -\,\text{Cotg}\,(I.\,xy).\text{Cotg}\,(I.\,xz)$$
$$\text{Cos}\,(R.\overline{z} - R.\overline{x}) = -\,\text{Cotg}\,(I.\,xy).\text{Cotg}\,(I.\,yz)$$
$$\text{Cos}\,(R.\overline{x} - R.\overline{y}) = -\,\text{Cotg}\,(I.\,yz).\text{Cotg}\,(I.\,xz).$$

Ferner:

$$\text{Cos}\,(R.\overline{z}) = \text{Cos}\,(R.\,xy).\text{Cos}\,(r''.\,\overline{z})$$
$$\text{Cos}\,(R.\overline{y}) = \text{Cos}\,(R.\,xz).\text{Cos}\,(r'.\,\overline{y})$$
$$\text{Cos}\,(R.\overline{x}) = \text{Cos}\,(R.\,xz).\text{Cos}\,(r.\,\overline{x})\ \text{u. s. f.}$$

5. §. Man suche die Gleichung einer Ebene, die durch den Punct x' y' z' geht, und mit der Ebene I. parallel ist.

Ist die gesuchte Gleichung der Ebene von der Form

$$Lx + My + Nz - K = o,$$

so hat man durch die Bedingung, dass diese Ebene durch den gegebenen Punct geht,

$$Lx' + My' + Nz' - K = o,$$

und durch die Bedingung, dass diese Ebene parallel mit der Ebene I. ist,

$$\frac{A}{C} = \frac{L}{N},\quad \frac{B}{C} = \frac{M}{N},$$

also ist die Gleichung der gesuchten Ebene

$$A(x - x') + B(y - y') + C(z - z') = o.$$

6. §. Man suche die Gleichung einer Ebene, die durch drey gegebene Puncte geht.

Hat diese Gleichung die Form:

$$Lx + My + Nz - K = o,$$

und sind x' y' z' die Coordinaten des ersten, x'' y'' z'' des zweyten, und x''' y''' z''' die des dritten Punctes, so hat man

$$Lx' + My' + Nz' - K = o$$
$$Lx'' + My'' + Nz'' - K = o$$
$$Lx''' + My''' + Nz''' - K = o$$

aus welchen Gleichungen man durch Elimination die Werthe von $\frac{L}{K}$, $\frac{M}{K}$, $\frac{N}{K}$ durch x' x''...... bestimmen wird. Man kann annehmen:

$$L = z'(y'''-y'') - z''(y'''-y') + z'''(y''-y')$$
$$M = x'(z'''-z'') - x'(z'''-z') + x'''(z''-z')$$
$$N = y'(x'''-x'') - y''(x'''-x') + y'''(x''-x')$$
$$K = x'(y''z'''-y'''z'') - x''(y'z'''-y'''z') + x'''(y'z''-y''z').$$

I. Wir wollen nun die Bedeutung dieser Grössen L, M, N, K im Raume suchen.

Es sey T die Fläche des geradlinichten Dreyeckes, welches zwischen den drey gegebenen Puncten, durch welche die gesuchte Ebene geht, enthalten ist. Die Projection dieser Fläche des Dreyeckes in der coordinirten Ebene der yz, xz und xy wollen wir in derselben Ordnung t, t' und t'' nennen.

Nennt man der Kürze wegen O den Anfangspunct der Coordinaten, und I., II., III. die Projectionen des ersten, zweyten und dritten der gegebenen Puncte in der Ebene der xy, so ist, wie man leicht sieht,

$\frac{1}{2}(x''y'-x'y'')$ die Fläche des Dreyecks O. I. II. und eben so

$\frac{1}{2}(x'''y'-x'y''')$ - - - - O. I. III.

$\frac{1}{2}(x''y'''-x'''y'')$ - - - - O. II. III.

und überdiess

O. I. III. + O. II. III. — O. I. II. = I. II. III. oder = t''.

Allein der vorhergehende Ausdrück von N kann auch so gegeben werden:

$$\frac{N}{2} = \frac{1}{2}(x'''y'-x'y''') + \frac{1}{2}(x''y'''-x'''y'') - \frac{1}{2}(x''y'-x'y''),$$

also ist

$$\frac{N}{2} = \text{O. I. III.} + \text{O. II. III.} - \text{O. I. II. oder } \frac{N}{2} = t'',$$

und eben so findet man $\frac{M}{2} = t'$, und $\frac{L}{2} = t$.

Nennt man aber a, a'. a'' in derselben Ordnung die

Neigung der gesuchten Ebene, welche zugleich die Ebene des Dreyeckes T ist, gegen die coordinirte Ebene der yz, xz, xy, so ist:

$$t = T \cos a$$
$$t' = T \cos a'$$
$$t'' = T \cos a''$$

also auch, da nach dem Vorhergehenden

$$\cos^2 a + \cos^2 a' + \cos^2 a'' = 1 \text{ ist},$$
$$t^2 + t'^2 + t''^2 = T^2,$$

oder wenn man die gefundenen Werthe von t, t', t'' substituirt

$$4 T^2 = L^2 + M^2 + N^2.$$

Heisst aber R das Loth vom Anfangspuncte der Coordinaten auf die gesuchte Ebene des Dreyeckes T, so ist

$$R = \frac{K}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}$$

und die beyden letzten Gleichungen geben

$$K = 2 R T.$$

Es ist aber bekanntlich der körperliche Inhalt der Pyramide P, die zwischen den drey gegebenen Puncten des Dreyeckes T als Basis, und dem Anfangspuncte der Coordinaten als Scheitel enthalten ist, gleich dem dritten Theile der Basis in die Höhe des Scheitels über der Basis, also ist

$$P = \tfrac{1}{3} R T \text{ oder}$$
$$K = 6 P$$

also diese vierte unserer Grössen K gleich der sechsfachen Pyramide, welche zwischen jenen vier Puncten enthalten ist, oder mit andern Worten, gleich dem Parallelepipedum, welches zwischen denselben vier Puncten enthalten ist.

Substituirt man die gefundenen Werthe von L, M, N, K in der gegebenen Gleichung

$$Lx + My + Nz - K = 0$$

so hat man

$$\frac{t}{3} \cdot x + \frac{t'}{3} \cdot y + \frac{t''}{3} \cdot z = P,$$

das heisst: wenn man die Fläche T eines Dreyeckes, welches zwischen drey gegebenen Puncten einer Ebene enthalten ist, auf die drey coordinirten Ebenen projicirt, so ist die Summe des körperlichen Inhalts der drey Pyramiden, deren Scheitel irgend ein willkührlicher Punct jener Ebene, und deren Basis jene drey projicirten Dreyecke sind, gleich dem körperlichen Inhalte der Pyramide, deren Scheitel der Anfang der Coordinaten, und deren Basis das Dreyeck T zwischen den drey gegebenen Puncten der Ebene ist.

II. Ist S die Fläche eines anderen Dreyeckes in der gegebenen Ebene, und s, s′, s″ die Projection dieser Fläche in den Ebenen der yz, xz, xy, so ist, wie zuvor,

$$S^2 = s^2 + s'^2 + s''^2,$$

und überdiess $\frac{t}{T} = \frac{s}{S}$, $\frac{t'}{T} = \frac{s'}{S}$, $\frac{t''}{T} = \frac{s''}{S}$.

Es war aber $T^2 = t^2 + t'^2 + t''^2$, oder

$$T = \frac{t}{T} \cdot t + \frac{t'}{T} \cdot t' + \frac{t''}{T} \cdot t'',$$

also, wenn man die vorhergehenden Werthe von $\frac{t}{T}$... substituirt

$$TS = ts + t's' + t''s''.$$

Entwickelt man daher die Grösse $(T + S)^2$, und substituirt, so hat man

$$(T + S)^2 = (t + s)^2 + (t' + s')^2 + (t'' + s'')^2.$$

Hätte man noch eine dritte Dreyecks-Fläche R, deren Projectionen r, r′, r″ sind, so würde man eben so erhalten

$(T + S + R)^2 = (t + s + r)^2 + (t' + s' + r')^2 + (t'' + s'' + r'')^2$ u. f.

woraus folgt, dass das Quadrat einer *jeden* ebenen Figur gleich ist der Summe der Quadrate ihrer auf die drey coordinirten Ebenen projicirten Figuren.

7. §. Es sey die Ebene $Lx + My + Nz - K = o$

gegeben, und man bezeichne, wie oben durch (I. xy), (I. xz), (I. yz) die Winkel dieser Ebene mit den Ebenen der xy, xz, yz, und durch (I. x), (I. y), (I. z) die Winkel dieser Ebene mit den Achsen der x, y, z, so hat man:

$$\text{Sin (I. x)} = \text{Cos (I. yz)} = \frac{L}{Q}$$

$$\text{Sin (I. y)} = \text{Cos (I. xz)} = \frac{M}{Q}$$

$$\text{Sin (I. z)} = \text{Cos (I. xy)} = \frac{N}{Q},$$

wo man der Kürze wegen $Q = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2}$ gesetzt hat. Da ferner nach §. 2 das Loth R vom Anfange der Coordinaten auf die gegebene Ebene gleich

$$R = \frac{K}{Q}$$

ist, so hat man

$$\frac{L}{K} = \frac{\text{Sin (I. x)}}{R}, \quad \frac{M}{K} = \frac{\text{Sin (I. y)}}{R}, \quad \frac{N}{K} = \frac{\text{Sin (I. z)}}{R}$$

und wenn man diese Werthe in der vorhergehenden Gleichung der gegebenen Ebene substituirt, so erhält man

$$x \,\text{Sin (I. x)} + y \,\text{Sin (I. y)} + z \,\text{Sin (I. z)} = R \ldots. \text{(a)}$$

oder auch

$$x \,\text{Cos (I. yz)} + y \,\text{Cos (I. xz)} + z \,\text{Cos (I. xy)} = R \ldots. \text{(b)}$$

Sind endlich a b c die Entfernungen der Puncte der Achsen der x y z, in welchen diese Achsen von der Ebene geschnitten werden, so ist

$$\text{Sin (I. x)} = \frac{R}{a}, \ \text{Sin (I. y)} = \frac{R}{b}, \ \text{Sin (I. z)} = \frac{R}{c},$$

also auch

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \text{ oder}$$

$$bcx + acy + abz = abc \ldots. \text{(c)}$$

drey merkwürdige Formen der allgemeinen Gleichung einer Ebene. Die vorletzte derselben drückt unmittelbar den §. 6 I. gegebenen Satz aus. Denn ist F der Flächeninhalt irgend einer in der gegebenen Ebene enthal-

tenen Figur, so gibt die Gleichung (b), wenn man sie durch $\frac{1}{3}$ F multiplicirt:

$$\frac{x}{3}.F\,Cos(I.y\,z)+\frac{y}{3}.F\,Cos(I.x\,z)+\frac{z}{3}.F\,Cos(I.x\,y)=\frac{R}{3}.F.$$

In dieser Gleichung ist $\frac{R}{3}$ F der körperliche Inhalt der Pyramide, deren Scheitel im Anfange, und deren Basis die Figur F ist, und da F Cos (I. y z), F Cos (I. x z), F Cos (I. x y) die Projectionen jener Figur in den drey coordinirten Ebenen sind, so drücken die drey Glieder des ersten Theils dieser Gleichung die drey andern Pyramiden aus, deren Scheitel irgend ein Punct der gegebenen Ebene ist, und deren Basis jene Projectionen der Figur sind.

Einen ähnlichen Satz enthält die Gleichung (a). Fällt man von irgend einem Puncte A der gegebenen Ebene auf die Ebene der x y ein Loth, welches Loth diese Ebene der x y in dem Puncte B treffen soll; und fällt man von dem Puncte B wieder ein Loth zurück auf die gegebene Ebene, welches Loth die gegebene Ebene in dem Puncte C treffen soll, so bilden die Puncte A B C ein bey C rechtwinklichtes Dreyeck, in welchem das erste Loth A B = z, und der Winkel B A C = (I. z) ist.

Daraus folgt, dass das zweyte Loth B C, welches man von der Projection B des Punctes A in der Ebene x y auf die gegebene Ebene gezogen hat, gleich z . Sin (I. z) ist. Eben so sind y . Sin (I. y) und x . Sin (I. x) die Lothe, welche man von der Projection des Punctes A in den Ebenen der x z und y z auf die gegebene Ebene gezogen hat. Die Gleichung (a) sagt daher, dass die Summe der drey Lothe, welche man von den drey Projectionen eines Punctes der Ebene auf diese Ebene fällt, gleich dem Lothe ist, welches man von dem Anfange der Coordinaten auf dieselbe Ebene gefällt hat. Also ist auch die Summe der drey Pyramiden, deren gemein-

schaftliche Basis irgend eine Figur in der gegebenen Ebene ist, und deren Scheitel die drey Projectionen irgend eines Punctes dieser Ebene auf die drey coordinirten Ebenen sind, gleich der einzigen Pyramide, welche dieselbe Basis, und zum Scheitel den Anfangspunct der Coordinaten hat.

I. Wie wir in dem Vorhergehenden die Projectionen eines Punctes der gegebenen Ebene wieder auf diese Ebene zurück projicirt haben, eben so kann man auch mit Flächen verfahren, die in der gegebenen Ebene enthalten, und durch irgend eine ebene Figur begränzt sind. Ist F der Flächeninhalt dieser Figur, so sind die Projectionen derselben auf den drey coordinirten Ebenen $\varphi = F . \mathrm{Cos}\,(I. yz)$, $\varphi' = F . \mathrm{Cos}\,(I. xz)$, $\varphi'' = F . \mathrm{Cos}\,(I. xy)$ und da

$\mathrm{Cos}^2\,(I. yz) + \mathrm{Cos}^2\,(I. xz) + \mathrm{Cos}^2\,(I. xy) = 1 \ldots (d)$

ist, so hat man

$$\varphi^2 + \varphi'^2 + \varphi''^2 = F, \text{ wie §. 6 II.}$$

Projicirt man diese drey Flächen wieder zurück auf die gegebene Ebene, so erhält man die folgenden drey Projectionen der zweyten Ordnung:

$f = \varphi\, \mathrm{Cos}\,(I. yz)$, $f' = \varphi'\, \mathrm{Cos}\,(I. xz)$, $f'' = \varphi''\, \mathrm{Cos}\,(I. xy)$,

oder

$f = F\, \mathrm{Cos}^2\,(I. yz)$, $f' = F\, \mathrm{Cos}^2\,(I. xz)$, $f'' = F\, \mathrm{Cos}^2\,(I. xy)$,

also nach der Gleichung (d)

$$f + f' + f'' = F,$$

oder die Summe der drey Projectionen der zweyten Ordnung ist gleich der ursprünglichen Fläche F.

Wir wollen nun diese zweyten Projectionen f, f′, f″ neuerdings auf die coordinirten Ebenen, und von diesen zurück auf die gegebene Ebene projiciren. Projicirt man f auf die coordinirten Ebenen, so erhält man für die Projectionen der dritten Ordnung $f\, \mathrm{Cos}\,(I. yz)$, $f\, \mathrm{Cos}\,(I. xz)$, $f\, \mathrm{Cos}\,(I. xy)$, und projicirt man diese wieder auf die gegebene Ebene, so erhält man für die Projectionen der vierten Ordnung

$f \, Cos^2 (I. yz)$, $f \, Cos^2 (I. xz)$, $f \, Cos^2 (I. xy)$.

Eben so gibt die Projection f' folgende Projectionen der vierten Ordnung: $f' \, Cos^2 (I. yz)$, $f' \, Cos^2 (I. xz)$, $f' \, Cos^2 (I. xy)$, und die Projection f'' gibt: $f'' \, Cos^2 (I. yz)$, $f'' \, Cos^2 (I. xz)$, $f'' \, Cos^2 (I. xy)$.

Addirt man alle neun Projectionen, so erhält man für ihre Summe $f + f' + f''$, das heisst, die ursprüngliche Fläche F. Setzt man diess fort, so findet man, dass die Summe der 3 Projectionen der zweyten Ordnung in der gegebenen Ebene, oder die Summe der 9 Projectionen der vierten Ordnung, oder die Summe der 27 Projectionen der sechsten Ordnung, oder überhaupt, wenn n eine ganze positive Zahl ist, dass die Summe der 3^n Projectionen der Ordnung 2n immer gleich der ursprünglichen Fläche F ist.

8. §. In einer Ebene, welche mit den coordinirten Ebenen der yz, xz, xy in derselben Ordnung die Winkel a b c bildet, sey die Fläche (A) irgend einer ebenen Figur gegeben. Man suche die Projection B dieser Figur auf eine andere Ebene, welche mit den coordinirten Ebenen der yz, xz, xy die Winkel α β γ bildet.

Ist ω der Winkel, welchen die erste Ebene der Figur (A) mit der zweyten Ebene der Figur (B) macht, so ist §. 3

$$Cos \, \omega = Cos \, a \, Cos \, \alpha + Cos \, b \, Cos \, \beta + Cos \, c \, Cos \, \gamma$$

und $B = (A) \, Cos \, \omega$, also auch

$$B = (A) \, . \, [Cos \, a \, Cos \, \alpha + Cos \, b \, Cos \, \beta + Cos \, c \, Cos \, \gamma],$$

und durch diese Gleichung findet man die Projection B einer jeden ebenen Figur (A), wenn die Lagen der Ebenen der beyden Figuren durch die Grössen $a \, \alpha \, b \, \beta \ldots$ gegeben sind. Sind nun die Projectionen der Figur (A) in den Ebenen der yz, xz, xy bekannt, und sind diese Projectionen in derselben Ordnung A, A', A'', so hat man:

$A = (A) \, Cos \, a$, $A' = (A) \, Cos \, b$, $A'' = (A) \, Cos \, c$, also die vorhergehende Gleichung

$$B = A \cos\alpha + A' \cos\beta + A'' \cos\gamma,$$

welcher Ausdruck die Projection B der gegebenen Figur (A) in den drey coordinirten Ebenen gibt.

I. Es sey nun irgend eine Anzahl von Flächen (A), (A'), (A'') . . . in verschiedenen willkührlichen Ebenen gelegen, gegeben. Sey A die Summe der Projectionen aller dieser Flächen in der coordinirten Ebene der y z, A' die Summe dieser Projectionen in x z, nnd A'' die Summe dieser Projectionen in x y. Man projicire ferner alle diese Flächen (A), (A'), (A''), . . auf eine andere Ebene, welche mit den coordinirten Ebenen der y z, x z, x y resp. die Winkel α β γ bildet, und nenne B die Summe aller dieser Projectionen in der neuen Ebene. Diess vorausgesetzt, hat man nach dem Vorhergehenden:

$$B = A \cos\alpha + A' \cos\beta + A'' \cos\gamma$$

Bezeichnet man eben so durch B' die Summe der Projectionen der Flächen (A), (A'), . . . auf eine zweyte Ebene, welche mit den coordinirten Ebenen die Winkel α' β' γ' bildet, und durch B'' die Summe der Projectionen derselben Flächen (A), (A') auf eine dritte Ebene, welche mit den coordinirten Ebenen die Winkel α'' β'' γ'' bildet u. s. w., so hat man

$$B' = A \cos\alpha' + A' \cos\beta' + A'' \cos\gamma'$$
$$B'' = A \cos\alpha'' + A' \cos\beta'' + A'' \cos\gamma'' \text{ u. f.}$$

II. Nehmen wir an, dass die drey neuen Ebenen, welche die Projectionen B B' B'' enthalten, unter einander rechtwinlicht sind, so hat man (§. 3 II.) zwischen den Cosinus der Winkel α, α' . . . folgende sechs Bedingungsgleichungen:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\alpha' + \cos^2\alpha'' = 1$$
$$\cos^2\beta + \cos^2\beta' + \cos^2\beta'' = 1$$
$$\cos^2\gamma + \cos^2\gamma' + \cos^2\gamma'' = 1$$
$$\cos\alpha \cos\beta + \cos\alpha' \cos\beta' + \cos\alpha'' \cos\beta'' = 0$$
$$\cos\alpha \cos\gamma + \cos\alpha' \cos\gamma' + \cos\alpha'' \cos\gamma'' = 0$$
$$\cos\beta \cos\gamma + \cos\beta' \cos\gamma' + \cos\beta'' \cos\gamma'' = 0$$

und durch diese Bedingungsgleichungen gehen die drey vorletzten Gleichungen über in:

$$\left.\begin{array}{l} A = B \operatorname{Cos} \alpha + B' \operatorname{Cos} \alpha' + B'' \operatorname{Cos} \alpha'' \\ A' = B \operatorname{Cos} \beta + B' \operatorname{Cos} \beta' + B'' \operatorname{Cos} \beta'' \\ A'' = B \operatorname{Cos} \gamma + B' \operatorname{Cos} \gamma' + B'' \operatorname{Cos} \gamma'' \end{array}\right\} \ldots (e)$$

welchen Ausdrücken man noch den folgenden hinzusetzen kann:

$$A^2 + A'^2 + A''^2 = B^2 + B'^2 + B''^2$$

III. Die letzte der gefundenen Gleichungen zeigt, dass die Summe der Quadrate der drey neuen Projectionen $B^2 + B'^2 + B''^2$ ganz unabhängig ist von der Lage der drey Projectionsebenen, d. h. dass diese Summe sich nicht ändert, wenn man von einem Systeme rechtwinklichter Ebenen zu einem andern ähnlichen Systeme übergeht. Aus dieser Gleichung folgt:

$$B = \sqrt{A^2 + A'^2 + A''^2 - B'^2 - B''^2}.$$

Die Summe B der Projectionen auf der ersten neuen Ebene, die von einer Projectionsebene zur andern veränderlich ist, erhält also ihren grössten Werth, wenn man $B' = o$ und $B'' = o$ setzt, und dieser grösste Werth von B ist

$$\sqrt{A^2 + A'^2 + A''^2}.$$

Die Lage dieser Ebene, auf welcher die Projection B ein Maximum ist, wird durch die Gleichungen $B' = o$ und $B'' = o$ leicht gefunden. Denn diese beyden Ausdrücke reduciren die Gleichungen (e) auf folgende einfache:

$$A = B \operatorname{Cos} \alpha, \quad A' = B \operatorname{Cos} \beta, \quad A'' = B \operatorname{Cos} \gamma,$$

und da man überdiess: $B = \sqrt{A^2 + A'^2 + A''^2}$ hat, so findet man die Winkel $\alpha\ \beta\ \gamma$, welche die Lage der Ebene der grössten Projection bestimmen, durch die Ausdrücke:

$$\operatorname{Cos} \alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + A'^2 + A''^2}}$$

$$\mathrm{Cos}\,\beta = \frac{A'}{\sqrt{A^2 + A'^2 + A''^2}}$$

$$\mathrm{Cos}\,\gamma = \frac{A''}{\sqrt{A^2 + A'^2 + A''^2}}.$$

Wenn man also die drey Projectionen A A' A'' auf drey willkührlich gewählte coordinirte Ebenen kennt, so kann man durch sie unmittelbar die Richtung der Ebene der grössten Projection bestimmen; ihre Richtung, aber nicht ihren absoluten Ort im Raume, denn der letzte bleibt der Natur der Sache gemäss unbesimmt, weil die Projectionen der Flächen (A), (A') . . . auf verschiedenen Flächen immer dieselben bleiben, wenn diese Flächen unter einander parallel sind.

9. §. Um die drey Projectionen der Durchschnittslinie der beyden Ebenen I. und II. zu finden, wird man, wie schon erinnert wurde, aus den beyden Gleichungen (I.) (II.) dieser Ebenen nach einander die Grössen x, y, z eliminiren. Man erhält so für die Projectionen dieser Durchschnittslinien in den Ebenen der x y, x z und y z folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} ly - mx + \nu = 0 \\ nx - lz + \mu = 0 \\ mz - ny + \lambda = 0 \end{array}\right\} (1)$$

wo $l = BC' - B'C$ und $\lambda = DA' - D'A$
$m = CA' - C'A$ $\mu = DB' - D'B$
$n = AB' - A'B$ $\nu = DC' - D'C$ ist.

Von den sechs Coefficienten der Gleichungen (1) sind nur vier nothwendig; die fünfte ist durch die Bedingungsgleichung

$$l\lambda + m\mu + n\nu = 0$$

gegeben, und die sechste ist willkührlich, weil in den Gleichungen (I.) (II.) der gegebenen Ebenen auch einer der vier Coefficienten willkührlich ist.

10. §. Durch einen gegebenen Punct eine Gerade

ziehen, die mit der gegebenen Geraden 1 einen gegebenen Winkel v bildet.

Sind x′ y′ z′ die Coordinaten des gegebenen Punctes, so haben die Gleichungen der gesuchten Linie die Form

$$x - x' = A\,(z - z')$$
$$y - y' = B\,(z - z').$$

Die Gleichungen der gegebenen Linie 1 sind aber

$$x = az + \alpha$$
$$y = bz + \beta.$$

Also wird man eine der unbekannten Grössen A und B durch die Gleichung bestimmen

$$\text{Cos } v = \frac{Aa + Bb + 1}{\sqrt{A^2 + B^2 + 1}\,.\,\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}.$$

Sollen überdiess beyde Linien in einer Ebene liegen, sich schneiden, so hat man:

$$(a - A)\,(\beta - y' + Bz') = (b - B)\,(\alpha - x' + Az')$$

und die beyden letzten Gleichungen bestimmen A und B.

I. Geht die gesuchte Gerade durch den Anfang der Coordinaten, so hat man zur Bestimmung von A und B die Gleichungen:]

$$\text{Cos } v = \frac{Aa + Bb + 1}{\sqrt{A^2 + B^2 + 1}\,.\,\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}$$

$$B = \frac{A + \alpha b - a\beta}{\alpha}$$

wo man für A und B aus einer quadratischen Gleichung zweyfache Werthe erhält.

II. Soll endlich die gesuchte Gerade auf die gegebene senkrecht seyn, so ist

$$\text{Cos } v = 0 \text{ und } Aa + Bb + 1 = 0, \text{ also}$$

$$A = \frac{b\,(a\beta - \alpha b) - \alpha}{a\alpha + b\beta}, \text{ und}$$

$$B = \frac{a\,(\alpha b - a\beta) - \beta}{a\alpha + b\beta}.$$

Für den Durchschnittspunct beyder Geraden hat man:

$$X = \frac{A\alpha}{A-\alpha},\quad Y = \frac{B\alpha}{A-\alpha},\quad Z = \frac{\alpha}{A-\alpha}.$$

11. §. Man suche die Gleichung einer Ebene, die durch den Punct $x' y' z'$ und durch die gegebene Gerade (1) geht.

Sey $Ax + By + Cz + D = o$ die Gleichung der gesuchten Ebene. Da diese Ebene durch den Punct $x' y' z'$ und auch durch den Punct geht, in welchem die Gerade (1) die Ebene der xy trifft, und da die Coordinaten des letzten Punctes sind:

$$x = \alpha,\ y = \beta,\ z = o$$

so hat man:

$$\left.\begin{array}{l} Ax' + By' + Cz' + D = o \\ A\alpha + B\beta + D = o \end{array}\right\} (a).$$

Führt man aber die gesuchte Ebene sowohl, als die Linie (1) parallel mit sich fort, bis beyde durch den Anfangspunct der Coordinaten gehen, so werden in dieser neuen Lage die Gleichungen der Geraden

$$x = az,\ y = bz$$

und die Gleichung der Ebene

$$Ax + By + Cz = o \text{ werden,}$$

und da auch in dieser Lage die Linie (1) noch in der gesuchten Ebene liegen muss, so ist

$$Aa + Bb + C = o \ldots (b).$$

Die drey Gleichungen (a) und (b) geben die gesuchten Werthe von $\frac{A}{C}$, $\frac{B}{C}$, $\frac{D}{C}$ und die Gleichung der gesuchten Ebene ist:

$$(x - x')(y' - bz' - \beta) - (y - y')(x' - az' - \alpha)$$
$$+ (z - z') . [b(x' - \alpha) - a(y' - \beta)] = o.$$

12. §. Man suche die Gleichung einer Ebene, die durch einen gegebenen Punct $x' y' z'$ geht, und parallel mit den beyden Geraden (1) und (2) ist.

Die Gleichung der Ebene, welche durch den gegebenen Punct geht, wird die Form haben,

$$A(x-x')+B(y-y')+C(z-z')=o.$$

Damit diese Ebene mit der Linie 1 parallel ist, hat man

$$Aa+Bb+C=o$$

und damit sie auch parallel mit der Linie 2 ist, hat man:

$$Aa'+Bb'+C=o.$$

Die zwey letzten Gleichungen geben die Werthe von $\frac{A}{C}$, $\frac{B}{C}$, welche in der ersten substituirt, für die Gleichung der gesuchten Ebene geben:

$$(x-x')(b'-b)+(y-y')(a-a')+(z-z')(a'b-ab')=o.$$

13. §. Sucht man eine Ebene $Ax+By+Cz+D=o$, die auf der gegebenen Geraden 1 senkrecht steht, so hat man die Bedingungsgleichungen:

$$\frac{A}{C}=a \text{ und } \frac{B}{C}=b,$$

also ist die Gleichung der gesuchten Ebene

$$ax+by+z+E=o\ \ldots\ (1),$$

wo die Constante E willkührlich ist.

Soll diese auf der Linie 1 senkrechte Ebene noch durch den Punct $x'\ y'\ z'$ gehen, so ist die Gleichung der Ebene

$$a(x-x')+b(y-y')+z-z'=o\ \ldots\ (2).$$

Ferner haben wir für die Gleichung einer Ebene, die durch den Punct $x'\ y'\ z'$ und durch die Linie 1 geht, gefunden (§. 11)

$$(x-x')(y'-bz'-\beta)-(y-y')(x'-az'-\alpha)$$
$$+(z-z')[b(x'-\alpha)-a(y'-\beta)]=o\ \ldots\ (3).$$

Aber die Durchschnittslinie der beyden Ebenen (2) (3) steht senkrecht auf der Linie 1, also sind (2), (3) zugleich die Gleichungen einer Geraden, die durch den Punct $x'\ y'\ z'$ senkrecht auf der Linie 1 steht.

Um die Coordinaten X Y Z des Durchschnittspunctes dieser Senkrechten mit der Linie 1 zu finden, wird man die Werthe von $x=az+\alpha$ und $y=bz+\beta$ in der Gleichung (2) substituiren, wodurch man den Werth von Z oder

$$Z = \frac{a(x' - \alpha) + b(y' - \beta) + z'}{1 + a^2 + b^2}$$

erhält, und dann ist

$$Y = bZ + \beta, \text{ und } X = aZ + \alpha.$$

Endlich ist die Länge dieser Senkrechten, zwischen dem Durchschnittspuncte X Y Z und dem gegebenen Puncte x' y' z' gleich:

$$R = \sqrt{(X - x')^2 + (Y - y')^2 + (Z - z')^2} \text{ oder}$$

$$R = \sqrt{\frac{(x' - \alpha - az')^2 + (y' - \beta - bz')^2 + [a(y' - \beta) - b(x' - \alpha)]^2}{1 + a^2 + b^2}}.$$

I. Geht die gegebene Linie 1 durch den Anfang der Coordinaten, so ist $\alpha = \beta = 0$, also

$$R = \sqrt{\frac{(x' - az')^2 + (y' - bz')^2 + (ay' - bx')^2}{1 + a^2 + b^2}};$$

und dann ist das Stück der gegebenen Linie zwischen dem Anfangspuncte der Coordinaten und dem Durchschnittspuncte der Senkrechten mit ihr gleich:

$$\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = Z\sqrt{1 + a^2 + b^2} = \frac{ax' + by' + z'}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}.$$

Die gegebenen Werthe von X Y Z sind also zugleich die Coordinaten des Durchschnittspunctes der Linie 1 mit einer auf dieser Linie senkrechten, durch den Punct x' y' z' gehenden Ebene, so wie R die Distanz dieses Durchschnittspunctes von dem Punct x' y' z' und endlich $\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ die Distanz dieses Durchschnittspunctes von dem Anfangspuncte der Coordinaten ist.

14. §. Man suche die Gleichungen einer Geraden, welche durch den gegebenen Punct x' y' z' senkrecht auf die gegebene Ebene

$$Ax + By + Cz + D = 0 \text{ geht.}$$

Da die gesuchte Gerade durch den Punct x' y' z' geht, so werden ihre Gleichungen die Form haben:

$$x - x' = a(z - z')$$
$$y - y' = b(z - z')$$

und da sie auf der gegebenen Ebene senkrecht stehen soll, so hat man wie im Anfange des §. 13.

$$\frac{A}{C} = a, \frac{B}{C} = b,$$

also sind die Gleichungen der gesuchten Geraden:

$$\left.\begin{array}{l} x - x' = \frac{A}{C}\ (z - z') \\ y - y' = \frac{B}{C}\ (z - z') \end{array}\right\} \ldots (4).$$

I. Um die Coordinaten X Y Z des Durchschnittspunctes dieser Ebene mit ihrer darauf senkrechten Geraden zu finden, wird man die Werthe von x und y aus (4) in der Gleichung $Ax + By + Cz + D = o$ substituiren, wodurch man für den Werth von Z erhält:

$Z = z' - CM$, und

$Y = y' - BM$

$X = x' - AM$, wo $M = \frac{Ax' + By' + Cz' + D}{A^2 + B^2 + C^2}$ ist.

Die Länge dieser Senkrechten zwischen den Puncten X Y Z und x' y' z' ist:

$$\sqrt{(X - x')^2 + (Y - y')^2 + (Z - z')^2} = \frac{Ax' + By' + Cz' + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Ist endlich der gegebene Punct x' y' z' der Anfang der Coordinaten, so ist $x' = y' = z' = o$, und die Länge des Lothes von dem Anfangspuncte auf die gegebene Ebene, zwischen diesem Puncte und dieser Ebene ist

$$\frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

15. §. Man suche die Gerade, welche auf den beyden gegebenen Geraden 1 und 2 senkrecht steht, und den Theil derselben, der zwischen den beyden gegebenen Geraden enthalten ist.

Die beyden Geraden 1 und 2 treffen die Ebene der xy in einem Puncte, dessen Coordinaten für die erste Gerade $x = \alpha$, $y = \beta$, $z = o$, und für die zweyte

Gerade $x = \alpha'$, $y = \beta'$, $z = o$ sind. Wir wollen diese Puncte P und P′ nennen.

Die Ebenen, welche durch die Puncte P und P′ gehen, und deren jede parallel mit den zwey Geraden 1, 2 ist, haben folgende Gleichungen (§. 12)

$$(x-\alpha)(b'-b)+(y-\beta)(a-a')+z(a'b-ab')=o$$
$$(x-\alpha')(b'-b)+(y-\beta')(a-a')+z(a'b-ab')=o.$$

Die geraden Linien aber, welche durch dieselben Puncte P und P′ senkrecht auf die beyden letzten parallelen Ebenen gehen, haben folgende Gleichungen (§. 14)

$$x = Az+\alpha \text{ und } x = Az+\alpha'$$
$$y = Bz+\beta \qquad y = Bz+\beta',$$

wo der Kürze wegen angenommen wurde

$$A = \frac{b-b'}{ab'-a'b}, \quad B = \frac{a'-a}{ab'-a'b}.$$

Diess vorausgesetzt wird die Ebene, welche durch die erste dieser senkrechten Geraden und durch die Linie 1, also auch durch den Punct P geht, unsere gesuchte Gerade enthalten. Die Gleichung dieser Ebene ist aber

$$(x-\alpha)(B-b)+(y-\beta)(a-A)$$
$$+z.(Ab-aB)=o\ldots(a).$$

Man wird nähmlich diese Gleichung erhalten, wenn man in der letzten Gleichung des §. 12 setzt $x' = \alpha$, $y' = \beta$, $z = o$ und

$$a' = A,\ b' = B.$$

Eben so wird die Ebene, welche durch die zweyte jener senkrechten Geraden und durch die Linie 1, also auch durch den Punct P′ geht, unsere gesuchte Gerade enthalten, und die Gleichung dieser Ebene wird seyn:

$$(x-\alpha')(B-b')+(y-\beta')(a'-A)$$
$$+z(Ab'-a'B)=o\ldots(b).$$

Daher werden auch die beyden letzten Gleichungen zusammenbetrachtet, die gesuchten Gleichungen der auf 1 und 2 senkrechten Geraden seyn. Substi-

tuirt man in diesen beyden Gleichungen die vorhergehenden Werthe von A und B, so werden sie in folgende übergehen

$$(x-\alpha)\,[a-a'+b\,(ab'-a'b)]+(y-\beta)\,[b-b'-a\,(ab'-a'b)]=z\,[a\,(a-a')+b\,(b'-b)],$$

$$(x-\alpha')\,[a-a'+b'\,(ab'-a'b)]+(y-\beta')\,[b-b'-a'\,(ab'-a'b)]=z\,[a'\,(a-a')+b'\,(b'-b)].$$

Eliminirt man aus diesen beyden Gleichungen zuerst y und dann x, so erhält man die beyden Ausdrücke wieder, welche wir (Cap. I. §. 19) gefunden haben.

Fällt man endlich vom Anfange der Coordinaten ein Loth auf die Ebene (a), so wird dieses Loth auch senkrecht auf der Ebene (b) stehen, und der Theil dieses Lothes, der zwischen diesen beyden Ebenen enthalten ist, wird der Theil Q unserer gesuchten Linie seyn, der zwischen den beyden Linien 1 und 2 enthalten ist.

Es ist aber das Loth vom Anfange auf die Ebene (a) nach §. 6 gleich

$$[\alpha\,(b-b')-\beta\,(a-a')]\,.\,M$$

und jenes auf die Ebene (b) gleich

$$[\alpha'\,(b-b')-\beta'\,(a-a')]\,.\,M,$$

also ihre Differenz gleich

$$Q=[(\alpha-\alpha')\,(b-b')-(\beta-\beta')\,(a-a')]\,.\,M,$$

wo der Kürze wegen gesetzt wurde

$$M=\frac{1}{\sqrt{(a-a')^2+(b-b')^2+(ab'-a'b)^2}}.$$

Wenn die beyden gegebenen Linien 1 2 in einer Ebene liegen, sich schneiden, so ist $Q=0$, oder

$$(\alpha-\alpha')\,(b-b')-(\beta-\beta')\,(a-a')=0$$

übereinstimmend mit Cap. I. §. 17. II.

I. Unsere gesuchte Gerade Q, welche auf den beyden gegebenen Linien senkrecht steht, ist zugleich die kürzeste Distanz dieser beyden gegebenen Linien.

Denn sind x y z die Coordinaten irgend eines Punc-

tes der Linie 1, und x′ y′ z′ die eines Punctes der Linie 2, so ist die Distanz dieser zwey Puncte

$$Q = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}.$$

Substituirt man in diesem Ausdrucke für x, y die Werthe $az + \alpha$, $bz + \beta$, und für x′ und y′ die Werthe $a'z' + \alpha'$, $b'z' + \beta'$ aus den Gleichungen der Linien 1, 2, so wird Q bloss eine Function von z und z′. Differentiirt man daher die Grösse Q in Beziehung auf z und auf z′, und setzt beyde Differentialien gleich Null, so erhält man:

$$(x-x')\,dx + (y-y')\,dy + (z-z')\,dz = 0$$
$$(x-x')\,dx' + (y-y')\,dy' + (z-z')\,dz' = 0,$$

oder

$$\left.\begin{array}{l}(x-x')\,a + (y-y')\,b + z - z' = 0\\(x-x')\,a' + (y-y')\,b' + z - z' = 0\end{array}\right\}\ldots(c).$$

Von diesen beyden Gleichungen gehört die erste für eine Ebene, die senkrecht auf der Linie 1 steht, und durch den Punct x′ y′ z′ der Linie 2 geht; so wie die zweyte für eine Ebene gehört, die senkrecht auf der Linie 2 steht, und durch den Punct x y z der Linie 1 geht. Beyde Ebenen werden sich daher in einer geraden Linie schneiden, die *senkrecht* auf den beyden gegebenen Linien 1, 2 steht, daher diese Aufgabe mit der vorhergehenden identisch ist.

Substituirt man in diesen zwey letzten Gleichungen für x — x′ und y — y′ ihre Werthe

$$\left.\begin{array}{l}x - x' = az - a'z' + \alpha - \alpha'\\y - y' = bz - b'z' + \beta - \beta'\end{array}\right\}(d),$$

so erhält man zwey Gleichungen, die bloss z und z′ enthalten, und aus welchen man daher diese Werthe von z und z′ durch Elimination bestimmen wird. Ist aber z und z′ bekannt, so hat man auch x y und x′ y′ durch die Gleichungen der Linie 1 und 2. Man erhält so die Coordinaten x y z und x′ y′ z′ der beyden Durchschnittspuncte der gesuchten kürzesten Distanz mit den

beyden gegebenen Linien 1, 2, und wenn man diese Werthe der Coordinaten in dem vorhergehenden Ausdrucke von Q substituirt, diese kürzeste Distanz selbst.

Da endlich die gesuchte kürzeste Linie durch die Puncte x y z und x′ y′ z′ geht, so sind ihre Gleichungen

$$x - x' = a''(z - z')$$
$$y - y' = b''(z - z').$$

Substituirt man diese Werthe von $x - x'$ und $y - y'$ in den Gleichungen (c), so hat man

$$1 + aa'' + bb'' = 0$$
$$1 + a'a'' + b'b'' = 0,$$

welche zwey Gleichungen ausdrücken, dass die gesuchte kürzeste Linie auf den beyden Linien 1 und 2 senkrecht steht. Cap. I. §. 17. II.

16. §. Wenn man durch den Mittelpunct einer Kugel des Halbmessers R drey unter einander senkrechte Ebenen, und drey unter einander senkrechte Linien zieht, welche Linien die Kugel in den drey Puncten L, M und N treffen, von denen die resp. rechtwinklichten Coordinaten sind a b c, a′ b′ c′, a″ b″ c″, so hat man folgende zwölf Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= R^2 \\ a'^2 + b'^2 + c'^2 &= R^2 \\ a''^2 + b''^2 + c''^2 &= R^2 \end{aligned}\right\}(1) \qquad \left.\begin{aligned} a^2 + a'^2 + a''^2 &= R^2 \\ b^2 + b'^2 + b''^2 &= R^2 \\ c^2 + c'^2 + c''^2 &= R^2 \end{aligned}\right\}(3)$$

$$\left.\begin{aligned} aa' + bb' + cc' &= 0 \\ aa'' + bb'' + cc'' &= 0 \\ a'a'' + b'b'' + c'c'' &= 0 \end{aligned}\right\}(2) \qquad \left.\begin{aligned} ab + a'b' + a''b'' &= 0 \\ ac + a'c' + a''c'' &= 0 \\ bc + b'c' + b''c'' &= 0 \end{aligned}\right\}(4).$$

Denn die Gleichungen (1) sagen, dass die drey Puncte L M N auf der Oberfläche der Kugel sind. Die erste der Gleichungen (2) aber sagt, dass die Ebene, welche durch den Mittelpunct der Kugel und durch die Puncte L, M geht, senkrecht auf der geraden Linie ist, welche den Mittelpunct mit dem Puncte N verbindet. Die zwey folgenden der Gleichungen (2) drücken ähnliche Sätze für die beyden andern Linien aus.

Nehmen wir nun an, dass die geraden Linien, in welchen sich jene drey coordinirten Ebenen schneiden, die Oberfläche der Kugel in den Puncten A B C treffen, und dass die Coordinaten dieser Puncte A B C in Beziehung auf jene drey senkrechten Ebenen, welche durch den Mittelpunct, und durch die drey ersten Puncte L M N gehen, sind $\alpha\ \beta\ \gamma$ für A, $\alpha'\ \beta'\ \gamma'$ für B, und $\alpha''\ \beta''\ \gamma''$ für C, so hat man wieder nach den Gleichungen (1) und (2)

$$\left.\begin{array}{l}\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = R^2 \\ \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = R^2 \\ \alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2 = R^2\end{array}\right\} \text{ und } \left.\begin{array}{l}\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0 \\ \alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' = 0 \\ \alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' = 0\end{array}\right\}$$

und man sieht leicht, dass man hat:

$$\begin{array}{lll}\alpha = a'' & \beta = a' \text{ und } & \gamma = a \\ \alpha' = b'' & \beta' = b' & \gamma' = b \\ \alpha'' = c'' & \beta'' = c' & \gamma'' = c.\end{array}$$

Substituirt man also diese Werthe von $\alpha\ \beta\ \gamma$. . . in den zwey vorhergehenden Systemen, so erhält man die Gleichungen (3) und (4).

I. Allgemein hat man zwischen den Grössen a b c, a' b' c', a'' b'' c'' und R R' R'' die Systeme

$$\left.\begin{array}{l}a^2 + b^2 + c^2 = R^2 \\ a'^2 + b'^2 + c'^2 = R'^2 \\ a''^2 + b''^2 + c''^2 = R''^2\end{array}\right\} (1') \quad \text{und} \quad \left.\begin{array}{l}aa' + bb' + cc' = 0 \\ aa'' + bb'' + cc'' = 0 \\ a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0\end{array}\right\} (2')$$

so hat man auch so fort folgende zwey Systeme:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{a^2}{R^2} + \frac{a'^2}{R'^2} + \frac{a''^2}{R''^2} = 1 \\ \frac{b^2}{R^2} + \frac{b'^2}{R'^2} + \frac{b''^2}{R''^2} = 1 \\ \frac{c^2}{R^2} + \frac{c'^2}{R'^2} + \frac{c''^2}{R''^2} = 1\end{array}\right\} (3') \quad \text{und} \quad \left.\begin{array}{l}\frac{ab}{R} + \frac{a'b'}{R'} + \frac{a''b''}{R''} = 0 \\ \frac{ac}{R} + \frac{a'c'}{R'} + \frac{a''c''}{R''} = 0 \\ \frac{bc}{R} + \frac{b'c'}{R'} + \frac{c''c''}{R''^2} = 0\end{array}\right\} (4').$$

Denn nehmen wir die drey unbestimmten Grössen u u' u'' so an, dass man hat

$$\begin{array}{l}au + a'u' + a''u'' = p \\ bu + b'u' + b''u'' = q \\ cu + c'u' + c''u'' = r,\end{array}$$

so hat man, wenn man diese drey Gleichungen quadrirt und addirt,

$$R^2u^2 + R'^2u'^2 + R''^2u''^2 = p^2 + q^2 + r^2 \ldots (a).$$

Multiplicirt man aber diese drey Gleichungen resp. durch

$$\begin{matrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{matrix}$$

so erhält man für die Summe dieser Producte

$$\begin{aligned} R^2\,u^2 &= p\,a + q\,b + r\,c \\ R'^2\,u'^2 &= p\,a' + q\,b' + r\,c' \\ R''^2\,u''^2 &= p\,a'' + q\,b'' + r\,c'' \end{aligned}$$

und sucht man aus diesen letzten Gleichungen die Werthe von u^2, u'^2, u''^2 und substituirt sie in (a), so erhält man

$$p^2\left(\frac{a^2}{R^2} + \frac{a'^2}{R'^2} + \frac{a''^2}{R''^2}\right) + q^2\left(\frac{b^2}{R^2} + \frac{b'^2}{R'^2} + \frac{b''^2}{R''^2}\right)$$

$$+ r^2\left(\frac{c^2}{R^2} + \frac{c'^2}{R'^2} + \frac{c''^2}{R''}\right) + 2pq\left(\frac{ab}{R^2} + \frac{a'b'}{R'^2} + \frac{a''b''}{R''^2}\right)$$

$$+ 2pr\left(\frac{ac}{R^2} + \frac{a'c'}{R'^2} + \frac{a''c''}{R''^2}\right) + 2qr\left(\frac{bc}{R^2} + \frac{b'c'}{R'^2} + \frac{b''c''}{R''^2}\right)$$

$$= p^2 + q^2 + r^2,$$

und da diese Gleichung in Beziehung auf p q r identisch seyn muss, so erhält man so fort die Gleichungen (3') und (4').

II. Es seyen drey concentrische Kugeln gegeben, deren Halbmesser R, R', R'' sind, und die Fläche zu suchen, welche durch die Bewegung des Durchschnittspunctes von drey beweglichen unter einander senkrechten Ebenen entsteht, von welchen drey Ebenen immer jede eine der drey gegebenen Kugeln berührt.

Sind a b c die drey rechtwinklichten Coordinaten des veränderlichen Punctes auf der Oberfläche der ersten Kugel, deren Halbmesser R ist, in welchem diese Kugel von ihrer Ebene tangirt wird, und sind a' b' c' und a'' b'' c'' die ähnlichen Coordinaten für die zwey

Berührungspuncte der beyden andern Kugeln, vorausgesetzt, dass der gemeinschaftliche Mittelpunct der drey Kugeln der Anfang der Coordinaten ist, so haben offenbar die Gleichungen (1') auch hier Statt.

Ferner sind, wie wir in dem nächstfolgenden Capitel sehen werden, die Gleichungen der drey berührenden Ebenen

$$a x + b y + c z = R^2$$
$$a' x + b' y + c' z = R'^2$$
$$a'' x + b'' y + c'' z = R''^2$$

und da diese drey Ebenen nach der Voraussetzung unter einander senkrecht seyn sollen, so haben auch die Gleichungen (2') Statt, und daher nach dem Vorhergehenden so fort auch die Gleichungen (3') und (4'). Wenn man aber die drey gegebenen Gleichungen der berührenden Ebenen quadrirt, nachdem man die erste durch R, die zweyte durch R' und die dritte durch R'' dividirt hat, so ist wegen den Gleichungen (3') und (4') die Summe dieser Quadrate

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 + R'^2 + R''^2,$$

welches die Gleichung einer Kugel des Halbmessers $\sqrt{R^2 + R'^2 + R''^2}$ ist.

Die gesuchte Fläche des Durchschnittspunctes jener drey senkrechten Ebenen, deren jede eine der drey concentrischen Kugeln berührt, ist also wieder eine den vorigen concentrische Kugel, deren Halbmesser gleich $\sqrt{R^2 + R'^2 + R''^2}$ ist.

In der That, da die berührende Ebene einer Kugel senkrecht auf dem Endpuncte des Halbmessers der Kugel steht, so wird die Distanz des Durchschnittspunctes der drey tangirenden Ebenen vom Mittelpuncte der Kugeln die Diagonale eines rechtwinklichten Parallelepipedums seyn, dessen drey anliegende Seiten R, R', R'' sind, vorausgesetzt, dass diese Distanz selbst immer gleich $\sqrt{R^2 + R'^2 + R''^2}$ ist.

III. Es sey die Fläche gegeben

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1,$$

welche, wenn A B C positive Grössen sind, bekanntlich für ein Ellipsoid gehört, dessen drey Achsen $\frac{1}{\sqrt{A}}, \frac{1}{\sqrt{B}}, \frac{1}{\sqrt{C}}$ sind.

Man suche die Fläche, welche durch die Bewegung des Durchschnittspunctes von drey unter einander senkrechten Ebenen entsteht, deren jede das Ellipsoid in einem Puncte tangirt.

Sind x' y' z' die Coordinaten des Berührungspunctes des Ellipsoids mit der ersten Ebene, und bezeichnet man die ähnlichen Coordinaten der beyden anderen Berührungspuncte mit zwey und drey Strichen, so hat man, da diese Berührungspuncte auf der Fläche des Ellipsoids liegen,

$$\left.\begin{array}{l} Ax'^2 + By'^2 + Cz'^2 = 1 \\ Ax''^2 + By''^2 + Cz''^2 = 1 \\ Ax'''^2 + By'''^2 + Cz'''^2 = 1 \end{array}\right\} (a).$$

Die Gleichungen der drey berührenden Ebenen aber sind (Cap. III.)

$$\left.\begin{array}{l} Axx' + Byy' + Czz' = 1 \\ Axx'' + Byy'' + Czz'' = 1 \\ Axx''' + Byy''' + Czz''' = 1 \end{array}\right\}$$

und da nach der Voraussetzung diese drey Ebenen unter einander senkrecht seyn sollen, so ist

$$\left.\begin{array}{l} A^2x'x'' + B^2y'y'' + C^2z'z'' = 0 \\ A^2x'x''' + B^2y'y''' + C^2z'z''' = 0 \\ A^2x''x''' + B^2y''y''' + C^2z''z''' = 0 \end{array}\right\} (b).$$

Setzt man aber der Kürze wegen

$$\begin{array}{lll} Ax' = a & Ax'' = a' & Ax''' = a'' \\ By' = b & By'' = b' & By''' = b'' \\ Cz' = c & Cz'' = c' & Cz''' = c'', \end{array}$$

so verwandeln sich die Gleichungen (b) in die vorigen Gleichungen (2′) und die Gleichungen (a) gehen in folgende über

$$\left.\begin{array}{l}\frac{a^2}{A}+\frac{b^2}{B}+\frac{c^2}{C}=1\\ \frac{a'^2}{A}+\frac{b'^2}{B}+\frac{c'^2}{C}=1\\ \frac{a''^2}{A}+\frac{b''^2}{B}+\frac{c''^2}{C}=1\end{array}\right\}(c).$$

Setzt man ferner

$R^2 = a^2 + b^2 + c^2$, $R'^2 = a'^2 + b'^2 + c'^2$ und $R''^2 = a''^2 + b''^2 + c''^2$,

so sind diese Ausdrücke mit den vorhergehenden (1′) identisch. Da also bereits die Gleichungen (1′) und (2′) auch hier gelten, so wird man nach dem Vorhergehenden unmittelbar auch die Gleichungen (3′) und (4′) anwenden können. Quadrirt man also die Gleichungen der berührenden Ebenen, nachdem man die erste durch R, die zweyte durch R', und die dritte durch R'' dividirt hat, so gibt die Summe dieser Quadrate, wenn man auf die Gleichungen (3′) und (4′) Rücksicht nimmt,

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{R^2} + \frac{1}{R'^2} + \frac{1}{R''^2}.$$

Addirt man aber eben so die Gleichungen (c), nachdem man die erste derselben durch R^2, die zweyte durch R'^2 und die dritte durch R''^2 dividirt hat, so erhält man

$$\frac{1}{R^2} + \frac{1}{R'^2} + \frac{1}{R''^2} = \frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C},$$

also ist

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C},$$

oder der veränderliche Durchschnittspunct der drey unter einander senkrechten Ebenen, deren jede das Ellipsoid berührt, beschreibt eine Kugel, welche mit diesem Ellipsoid concentrisch ist, und deren Halbmesser gleich der Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate der drey Achsen des Ellipsoids ist. Geht das Ellipsoid in eine Kugel über, deren Halbmesser r ist, so ist

$$A = B = C = \frac{1}{r^2} \text{ also}$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 3r^2.$$

für eine mit der gegebenen concentrischen Kugel, deren Halbmesser gleich $r\sqrt{3}$ ist.

17. §. Wenn man von allen Puncten einer Kugelfläche auf eine Ebene, die durch den Mittelpunct der Kugel geht, senkrechte Linien fällt, und wenn man durch die Fusspuncte dieser senkrechten Linien in irgend einer Richtung gerade unter sich parallele Linien zieht, deren jede ihrer Senkrechten proportionirt ist, welches wird die Fläche seyn, welche die Endpuncte aller dieser Parallelen enthält?

Sey die Gleichung der Kugel

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = r^2.$$

Zieht man durch den Fusspunct der Ordinate z' auf der Ebene der x' y' eine gerade Linie in irgend einer Richtung, so werden die Gleichungen dieser Linie seyn

$$x - x' = Az, \quad y - y' = Bz$$

und da, nach der Bedingung der Aufgabe, die Länge dieser Linie der Ordinate z' proportional ist, so hat man, wenn a eine constante Grösse bezeichnet,

$$\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2} = z.\sqrt{1 + A^2 + B^2} = a.z',$$

woraus so fort folgt

$$z' = \frac{z}{a}\sqrt{1 + A^2 + B^2}$$

$$x' = x - Az$$

$$y' = y - Bz.$$

Substituirt man diese Werthe von x' y' z' in der vorhergehenden Gleichung der Kugel, so erhält man, wenn

$$M = 1 + \frac{(A^2 + B^2)(1 + a^2)}{a^2} \text{ ist,}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 . M - 2Axz - 2Byz = r^2$$

für die Gleichung der gesuchten Fläche, die also eine Fläche der zweyten Ordnung ist.

18. §. Man suche eine Ebene, welche die Eigenschaft hat, dass die Summe aller Geraden, welche von mehreren gegebenen Puncten ausser der Ebene auf diese

Ebene senkrecht gezogen werden, gleich einer gegebenen Geraden m sey.

Setzt man, ohne der Allgemeinheit der Aufgabe Eintrag zu thun, voraus, dass alle diese Senkrechten auf einer Seite der Ebene sind, und dass die Gleichung der gesuchten Ebene die Form habe

$$z = ax + by + c,$$

so ist die auf diese Ebene senkrechte Linie im Allgemeinen gleich

$$\frac{z - ax - by - c}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}.$$

Sind also x' y' z' die Coordinaten des ersten, x'' y'' z'' die des zweyten gegebenen Punctes u. f., so hat man nach der Bedingung der Aufgabe

$$(z' - ax' - by' - c) + (z'' - ax'' - by'' - c)$$
$$+ (z''' - ax''' - by''' - c) + \ldots = m \,.\, \sqrt{1 + a^2 + b^2}.$$

Substituirt man den Werth von c, der aus dieser Gleichung folgt, in der Gleichung der gesuchten Ebene, und setzt $\Sigma x = x' + x'' + x''' \ldots$, so erhält man, wenn n die Anzahl der Puncte ist:

$$z - \frac{1}{n} \Sigma z = a\left(x - \frac{1}{n} \Sigma x - A\right) + b\left(y - \frac{1}{n} \Sigma y\right).$$

Bewegt man also die drey Achsen der Coordinaten parallel mit sich selbst, und setzt man den neuen Anfang der Coordinaten in den Ort, welcher dem arithmetischen Mittel der Coordinaten $x\, y\, z\, x' \ldots$ entspricht, so erhält man, wenn X, Y, Z diese neuen Coordinaten sind,

$$Z = a\left(X - \frac{m}{na} \sqrt{1 + a^2 + b^2}\right) + bY,$$

und diese Gleichung gehört für eine Ebene, die durch einen Punct der Achse der X geht, welcher von dem neuen Anfange der Coordinaten um die Grösse

$\frac{m}{n.a} \sqrt{1 + a^2 + b^2}$ entfernt ist.

Man wird sich daraus leicht überzeugen, dass alle

Ebenen, welche der Aufgabe genügen, Tangenten zu einer Kugel sind, deren Mittelpunct das arithmetische Mittel aller gegebenen Puncte, und deren Halbmesser gleich $\frac{m}{n}$ ist.

19. §. Eine Anzahl Puncte im Raume und eine Ebene ist gegeben.

Man fälle von diesen Puncten auf die Ebene Lothe, und multiplicire das erste dieser Lothe durch m′, das zweyte durch m″ u. f. Diess vorausgesetzt, suche man einen andern Punct, dessen Loth auf dieselbe Ebene durch $(m' + m'' + m''' \ldots)$ multiplicirt, gleich der Summe der Producte der Lothe aus den gegebenen Puncten in die gegebenen Zahlen m′ m″ m‴... ist.

Sind x' y' z' die Coordinaten des ersten gegebenen Punctes, x'' y'' z'' die des zweyten u. f. und x y z die unbekannten Coordinaten des gesuchten Punctes, ist endlich $Ax + By + Cz + D = o$ die Gleichung der Ebene, so hat man nach den Bedingungen der Aufgabe

$$(m' + m'' + m''' + \ldots.) (Ax + By + Cz + D) = m'(Ax' + By' + Cz' + D) + m''(Ax'' + By'' + Cz'' + D) + m'''(Ax''' + By''' + Cz''' + D) \ldots..$$

Setzt man also der Kürze wegen

$$\Sigma m'x' = m'x' + m''x'' + m'''x''' \ldots \text{ u. f.}$$

so ist die vorhergehende Gleichung

$$(Ax + By + Cz + D) \Sigma m = A \Sigma m'x' + B \Sigma m'y' + C \Sigma m'z' + D \Sigma m',$$

und da diese Gleichung Statt haben muss, welches auch die Werthe von A, B, C, D seyn mögen, so hat man für die Coordinaten des gesuchten Punctes

$$x = \frac{\Sigma m'x'}{\Sigma m'}, \quad y = \frac{\Sigma m'y'}{\Sigma m'}, \quad z = \frac{\Sigma m'z'}{\Sigma m'},$$

also ist der gesuchte Punct zugleich der Schwerpunct des Systems der gegebenen Puncte, wenn die Massen der gegebenen Puncte durch m′ m″ m‴ ... bezeichnet wer-

den. Sind diese Massen alle gleich, also $m' = m'' = m'''$, so ist, wenn n die Anzahl der gegebenen Puncte ist

$$x = \frac{1}{n} \Sigma x', \quad y = \frac{1}{n} \Sigma y', \quad z = \frac{1}{n} \Sigma z'.$$

20. §. Von zwey beweglichen Ebenen soll die eine durch den einen, die andere durch den andern Schenkel eines Winkels gehen, und beyde Ebenen sollen während ihrer Bewegung immer auf einander senkrecht seyn. Welche Fläche wird die Durchschnittslinie dieser beyden Ebenen beschreiben?

Wenn der Scheitel des Winkels der Anfang der Coordinaten ist, so sind die Gleichungen der zwey Ebenen von der Form:

$$Ax + By + Cz = 0$$
$$A'x + B'y + C'z = 0$$

und beyde zusammen genommen geben die Gleichung ihrer Durchschnittslinie. Die Bedingung, dass die beyden Ebenen auf einander senkrecht sind, gibt

$$AA' + BB' + CC' = 0.$$

Man hat daher

$$(AA' + BB') z^2 + BB'y^2 + AA'x^2 + (AB' + A'B) xy = 0$$

für die Gleichung der gesuchten Fläche, die also eine Fläche der zweyten Ordnung, und zwar ein Kegel ist, dessen Scheitel in dem Scheitel des gegebenen Winkels liegt.

I. Allgemein, wenn zwey Ebenen, deren jede durch eine von zwey gegebenen Geraden im Raume geht, immer auf einander senkrecht seyn sollen, so suche man die Fläche, welche die Durchschnittslinie jener zwey Ebenen beschreibt.

Welches immer jene zwey Linien im Raume sind, so kann man doch die drey coordinirten Ebenen, auf welche sie sich beziehen, so annehmen, dass die Gleichungen dieser zwey Linien sind

der ersten $y = ax, \quad z = c$

und der zweyten $y = -ax, \quad z = -c.$

Die Gleichungen der Ebenen, welche durch diese zwey Linien gehen, sind

$$z = -akx + ky + c$$
$$z = ak'x + k'y + c,$$

wo k, k' unbestimmte Grössen sind.

Da die beyden Ebenen rechtwinklicht seyn sollen, so ist:

$$kk'(1 - a^2) + 1 = 0.$$

Substituirt man in dieser Gleichung für k, k' ihre Werthe aus den vorhergehenden Gleichungen der zwey Ebenen, so erhält man für die Gleichung der gesuchten Fläche

$$y^2 + z^2(1 - a^2) - a^2x^2 = c^2(1 - a^2),$$

also wieder eine Fläche der zweyten Ordnung.

21. §. Die Lage eines Punctes M im Raume zu bestimmen, dessen Distanzen von drey ihrer Lage nach gegebenen Puncten man kennt.

Seyen x' y' z' die bekannten Coordinaten des ersten gegebenen Punctes M'. Für die beyden andern Puncte M'' und M''' bezeichne man dieselben Coordinaten mit zwey und drey Strichen. Die gegebenen Distanzen seyen MM' = a, MM'' = b, MM''' = c. Endlich seyen x, y, z die unbekannten Coordinaten des gesuchten Punctes M.

Diess vorausgesetzt hat man:

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \\ b^2 &= (x - x'')^2 + (y - y'')^2 + (z - z'')^2 \\ c^2 &= (x - x''')^2 + (y - y''')^2 + (z - z''')^2 \end{aligned}\right\} (1),$$

aus welchen drey Gleichungen die Werthe der drey unbekannten Grössen zu suchen sind.

Legt man die Ebene der xy durch einen der gegebenen Puncte z. B. M' so ist z' = 0, also die vorhergehenden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= x^2 + y^2 + z^2 - 2xx' - 2yy' + x'^2 + y'^2 \\ b^2 &= x^2 + y^2 + z^2 - 2xx'' - 2yy'' - 2zz'' + x''^2 + y''^2 + z''^2 \\ c^2 &= x^2 + y^2 + z^2 - 2xx''' - 2yy''' - 2zz''' + x'''^2 + y'''^2 + z'''^2 \end{aligned}\right\}$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen die Grösse $x^2 + y^2 + z^2$ und setzt der Kürze wegen

$$b^2 - a^2 + x'^2 + y'^2 - x''^2 - y''^2 - z''^2 = A$$
$$c^2 - a^2 + x'^2 + y'^2 - x'''^2 - y'''^2 - z'''^2 = B$$

$$2x' - 2x'' = \alpha, \quad 2y' - 2y'' = \alpha'$$
$$2x' - 2x''' = \beta, \quad 2y' - 2y''' = \beta',$$ so erhält man

$$\left.\begin{aligned} \alpha x + \alpha' y - 2z''z &= A \\ \beta x + \beta' y - 2z'''z &= B \end{aligned}\right\} (a).$$

Setzt man, um noch mehr abzukürzen

$$\frac{\alpha B - A\beta}{\alpha\beta' - \alpha'\beta} = B', \quad \frac{2(\alpha z''' - \beta z'')}{\alpha\beta' - \alpha'\beta} = A'$$
$$A\beta' - B\alpha' = B'', \quad 2(\beta' z'' - \alpha z''') = A'',$$

so geben die Gleichungen (a)

$$\left.\begin{aligned} x &= A''z + B'' \\ y &= A'z + B' \end{aligned}\right\} (b).$$

Substituirt man endlich diese Werthe von x und y in der vorhergehenden Gleichung

$$a^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2xx' - 2yy' + x'^2 + y'^2$$

und setzt neuerdings

$$1 + A'^2 + A''^2 = C,$$
$$A'B' + A''B'' - A''x' - A'y' = \frac{1}{2} D$$
$$B'^2 + B''^2 - 2B'y' - 2B''x' + x'^2 + y'^2 - a^2 = E,$$

so erhält man

$Cz^2 + Dz + E = o$, also für den gesuchten Werth von z

$$z = \frac{D \pm \sqrt{D^2 - 4EC}}{2C}$$

und daraus x y durch die Gleichungen (b).

I. Sind die gegebenen Puncte alle in der Ebene der xy, so ist $z' = z'' = z''' = o$, also auch $A' = A'' = D = o$, und $C = 1$, und daher

$$z = \pm\sqrt{E}$$
$$y = B'$$
$$x = B''.$$

22. §. Man suche eine Kugel, welche vier andere ihrer Grösse und Lage nach gegebene Kugeln berührt.

Seyen x y z die unbekannten Coordinaten der gesuchten Kugel, und R der Halbmesser derselben. Die analogen bekannten Coordinaten des Mittelpunctes der ersten gegebenen Kugel seyen a b c und r der gegebene Halbmesser derselben. Für die zweyte, dritte und vierte Kugel bezeichne man die Grössen a b c und r mit einem, zwey, drey Strichen.

Da für zwey sich von aussen oder innen berührende Kugeln die Distanz ihrer Mittelpuncte gleich der Summe oder Differenz ihrer Halbmesser ist, so hat man

$$\left.\begin{array}{l}(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=(R+r)^2\\(x-a')^2+(y-b')^2+(z-c')^2=(R+r')^2\\(x-a'')^2+(y-b'')^2+(z-c'')^2=(R+r'')^2\\(x-a''')^2+(y-a''')^2+(z-c''')^2=(R+r''')^2\end{array}\right\}(1).$$

Diese Gleichungen gelten für äussere Berührungen. Sollte z. B. die gesuchte Kugel die erste gegebene von innen berühren, so ist r negativ. Man bemerkt von selbst die Ähnlichkeit dieser Gleichungen mit den Gleichungen (1) des §. 12.

Zieht man die zweyte Gleichung von der ersten ab, und bemerkt, dass

$(x-a)^2-(x-a')^2=(a'-a)[2(x-a)-(a'-a)]$ ist u. f.

so wird, wenn man

$(a'-a)^2+(b'-b)^2+(c'-c)^2=d'^2$ setzt, wo also d' die Distanz der Mittelpuncte der zwey ersten gegebenen Kugeln bezeichnet

$$\left.\begin{array}{l}(a'-a)(x-a)+(b'-b)(y-b)+(c-c')(z-c)\\\qquad+(r'-r)(R+r)=\tfrac{1}{2}[d'^2-(r'-r)^2]\\\text{und eben so}\\(a''-a)(x-a)+(b''-b)(y-b)+(c''-c)(z-c)\\\qquad+(r''-r)(R+r)=\tfrac{1}{2}[d''^2-(r''-r)^2]\\(a'''-a)(x-a)+(b'''-b)(y-b)+(c'''-c)(z-c)\\\qquad+(r'''-r)(R+r)=\tfrac{1}{2}[d'''^2-(r'''-r)^2]\end{array}\right\}(2).$$

Da die Gleichungen (2) für die Grössen $x-a$, $y-b$, $z-c$, $R+r$ nur des ersten Grades sind, so kann man aus ihnen irgend drey dieser Grössen durch die vierte ausdrücken, und dann durch die Substitution derselben in die erste der Gleichungen (1) eine Gleichung finden, welche nur diese vierte Unbekannte enthält.

Bequemer noch erhält man die Grössen $x\ y\ z\ R$ durch folgendes Verfahren.

Es sey
$$(x-a) = (R+r)\,\mathrm{Cos}\,m\,\mathrm{Cos}\,n$$
$$(y-b) = (R+r)\,\mathrm{Sin}\,m\,\mathrm{Cos}\,n,$$
so gibt die erste der Gleichungen (1)
$$z-c = (R+r)\,\mathrm{Sin}\,n$$
und die Gleichungen (2) gehen in folgende über:

$$\left.\begin{aligned}
&(a'-a)\,\mathrm{Cos}\,m\,\mathrm{Cos}\,n + (b'-b)\,\mathrm{Sin}\,m\,\mathrm{Cos}\,n \\
&\quad + (c'-c)\,\mathrm{Sin}\,n + r' - r = \frac{d'^2 - (r'-r)^2}{2(R+r)} \\
&(a''-a)\,\mathrm{Cos}\,m\,\mathrm{Cos}\,n + (b''-b)\,\mathrm{Sin}\,m\,\mathrm{Cos}\,n \\
&\quad + (c''-c)\,\mathrm{Sin}\,n + r'' - r = \frac{d''^2 - (r''-r)^2}{2(R+r)} \\
&(a'''-a)\,\mathrm{Cos}\,m\,\mathrm{Cos}\,n + (b'''-b)\,\mathrm{Sin}\,m\,\mathrm{Cos}\,n \\
&\quad + (c'''-c)\,\mathrm{Sin}\,n + r''' - r = \frac{d'''^2 - (r'''-r)^2}{2(R+r)}
\end{aligned}\right\}\ (3).$$

Eliminirt man aus diesen 3 Gleichungen die Grösse $(R+r)$ und setzt der Kürze wegen

$$M = \frac{(d''+r''-r)\,(d''-r''+r)}{(d'+r'-r)\,(d'-r'+r)},\quad M' = \frac{(d'''+r'''-r)(d'''-r'''+r)}{(d'+r'-r)\,(d'-r'+r)}$$
$$A = a''-a-M(a'-a);\qquad A' = a'''-a-M'(a'-a)$$
$$B = b''-b-M(b'-b)\qquad B' = b'''-b-M'(b'-b)$$
$$C = c''-c-M(c'-c)\qquad C' = c'''-c-M'(c'-c)$$
$$D = r''-r-M(r'-r)\qquad D' = r'''-r-M'(r'-r),$$

so erhält man folgende zwey Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}
&A\,\mathrm{Cos}\,m\,\mathrm{Cos}\,n + B\,\mathrm{Sin}\,m\,\mathrm{Cos}\,n + C\,\mathrm{Sin}\,n + D = 0 \\
&A'\,\mathrm{Cos}\,m\,\mathrm{Cos}\,n + B'\,\mathrm{Sin}\,m\,\mathrm{Cos}\,n + C'\,\mathrm{Sin}\,n + D' = 0
\end{aligned}\right\}\ (4).$$

Aus diesen Gleichungen wollen wir zuerst die Werthe von m und n suchen. Multiplicirt man die erste dersel-

ben durch C′ und die zweyte durch C, so gibt die Differenz dieser Producte

$$(A'C - AC')\,\mathrm{Cos}\,m + (B'C - BC')\,\mathrm{Sin}\,m = \frac{C'D - CD'}{\mathrm{Cos}\,n} \quad \ldots (a).$$

Multiplicirt man aber die erste durch A′ Cos m + B′ Sin m, und die zweyte durch A Cos m + B Sin m, so gibt die Differenz dieser Producte:

$$(A'C - AC')\,\mathrm{Cos}\,m + (B'C - BC')\,\mathrm{Sin}\,m = \frac{(AD' - A'D)\,\mathrm{Cos}\,m + (BD' - B'D)\,\mathrm{Sin}\,m}{\mathrm{Sin}\,n} \quad \ldots (b).$$

Da aber $\mathrm{Cos}^2\,n = (1 + \mathrm{Sin}\,n)(1 - \mathrm{Sin}\,n)$ ist, so hat man aus den Gleichungen (a) und (b), wenn man der Kürze wegen

$Q = (A'C - AC')\,\mathrm{Cos}\,m + (B'C - BC')\,\mathrm{Sin}\,m$ setzt,

$$1 \pm \mathrm{Sin}\,n = [A'(C \mp D) - A(C' \mp D')]\,\frac{\mathrm{Cos}\,m}{Q}$$
$$+ [B'(C \mp D) - B(C' \mp D')]\,\frac{\mathrm{Sin}\,m}{Q}.$$

Bestimmt man nun die Grössen p, p′, ω, ω′ so, dass man hat

$$A'(C - D) - A(C' - D') = p\,\mathrm{Sin}\,\omega$$
$$B'(C - D) - B(C' - D') = p\,\mathrm{Cos}\,\omega$$
$$A'(C + D) - A(C' + D') = p'\,\mathrm{Sin}\,\omega'$$
$$B'(C + D) - B(C' + D') = p'\,\mathrm{Cos}\,\omega',$$

so hat man

$$1 + \mathrm{Sin}\,n = \frac{p}{Q}\,.\,\mathrm{Sin}\,(m + \omega),$$

$$1 - \mathrm{Sin}\,n = \frac{p'}{Q}\,.\,\mathrm{Sin}\,(m + \omega'),$$

und das Product dieser beyden Gleichungen gibt

$$\mathrm{Cos}^2\,n = \frac{pp'}{Q^2}\,\mathrm{Sin}\,(m + \omega)\,.\,\mathrm{Sin}\,(m + \omega').$$

Es ist aber auch aus (a)

$$\mathrm{Cos}^2\,n = \frac{(C'D - CD')^2}{Q^2}.$$

Setzt man daher beyde Werthe von Cos^2 n gleich, so ist

$$(C'D - CD')^2 = \frac{pp'}{2}[\text{Cos}(\omega' - \omega) - \text{Cos}(\omega' + \omega + 2m)],$$

also auch

$$\text{Cos}(\omega' + \omega + 2m) = \text{Cos}(\omega' - \omega) - \frac{2}{pp'}(C'D - CD')^2 \quad \ldots . (c).$$

Diese Gleichung gibt den gesuchten Werth von m. Nach dem Vorhergehenden ist ferner

$$\frac{1 - \text{Sin } n}{1 + \text{Sin } n} = \frac{p' \text{Sin}(m + \omega')}{p \text{ Sin}(m + \omega)}, \text{ oder}$$

$$\text{tg.}\left(45 - \frac{n}{2}\right) = \frac{C'D - CD'}{p \text{ Sin}(m + \omega)} \ldots . (d),$$

wodurch auch n bestimmt wird.

Setzt man also

$$\text{tg. } \omega = \frac{A'(C - D) - A(C' - D')}{B'(C - D) - B(C' - D')}$$

$$\text{tg. } \omega' = \frac{A'(C + D) - A(C' + D')}{B'(C + D) - B(C' + D')} \text{ und}$$

$$\text{tg. } k = \frac{C'D - CD'}{A'B - AB'},$$

so hat man für m und n, wie aus den Gleichungen (c) und (d) folgt,

$$\text{tg.}\left(\frac{\omega + \omega'}{2} + m\right) = \sqrt{\text{tg.} \tfrac{1}{2}(\omega' - \omega) \,.\, \text{tg.}[\tfrac{1}{2}(\omega' - \omega) - k]}$$

$$\text{tg.}\left(45 - \frac{n}{2}\right) = \frac{(C'D - CD') \text{ Sin } \omega}{[A'(C - D) - A(C' - D')] \text{ Sin }(m + \omega)}.$$

Ist aber m und n bekannt, so findet man R + r so fort durch eine der drey Gleichungen (3), und die Werthe von x y z durch

$$\left.\begin{aligned} x - a &= (R + r) \text{ Cos m Cos n} \\ y - b &= (R + r) \text{ Sin m Cos n} \\ z - c &= (R + r) \text{ Sin n} \end{aligned}\right\} (e).$$

I. Der Allgemeinheit der Aufgabe unbeschadet kann man die Ebene der x y durch die Mittelpuncte der drey ersten gegebenen Kugeln, die Achse der x durch die

Mittelpuncte der zwey ersten, und den Anfangspunct der Coordinaten in dem Mittelpuncte der ersten Kugel legen, Dann sind a, b, b', c, c', c'' Null;

$$\text{also } A = a'' - M a', \quad A' = a''' - M' a'$$
$$B = b'' \qquad B' = b'''$$
$$C = o \qquad C' = c'''.$$

II. Soll die gesuchte Kugel durch einen gegebenen Punct gehen, und drey gegebene Kugeln berühren, so wird man in den vorhergehenden Ausdrücken $r = o$ setzen. Soll die Kugel durch zwey Puncte gehen, und zwey Kugeln berühren, so ist $r = r' = o$. Soll sie durch drey Puncte gehen, und eine Kugel berühren, so ist $r = r' = r'' = o$.

Soll sie endlich durch vier gegebene Puncte gehen, so ist $r = r' = r'' = r''' = o$, in welchem letzten Falle auch $D = D' = o$, und

$$\text{tg. } m = \frac{A C' - A' C}{B' C - B C'}$$

$$\text{tg. } n = -\left(\frac{A \operatorname{Cos} m + B \operatorname{Sin} m}{C}\right) = -\left(\frac{A' \operatorname{Cos} m + B' \operatorname{Sin} m}{C}\right).$$

III. Soll die gesuchte Kugel drey gegebene Kugeln und eine der Lage nach gegebene Ebene berühren, so bleiben die drey ersten der Gleichungen (1). Ist dann die Gleichung der Fbene $L x + M y + N z + P = o$, so ist das aus dem Puncte, dessen Coordinaten $x\ y\ z$ sind, das heisst, das aus dem Mittelpuncte der gesuchten Kugel auf die Ebene gefällte Loth gleich

$$\frac{L x + M y + N z + P}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}},$$

welches also gleich R gesetzt werden muss, und wodurch man eine Gleichung der Form erhält

$$R + r = D'' + A''(x - a) + B''(y - b) + C''(z - c),$$

wo $A''\ B''\ C''\ D''$ gegebene Grössen sind. Substituirt man in dieser Gleichung die Werthe von $x - a$, $y - b$, $z - c$ aus den Gleichungen (e), so erhält man

$$A'' \operatorname{Cos} m \operatorname{Cos} n + B'' \operatorname{Sin} m \operatorname{Cos} n + C'' \operatorname{Sin} n - 1 = \frac{D''}{R + r}$$

und diese Gleichung mit den beyden ersten der Gleichungen (3) verbunden, wird wieder durch die Elimination der Grösse $(R + r)$ zwey Gleichungen der Form (4) geben.

Soll die gesuchte Kugel zwey Kugeln und zwey Ebenen berühren, so hat man aus den beyden ersten der Gleichungen (1) die erste der Gleichungen (3), und überdiess, wie so eben gezeigt wurde, zwey andere Gleichungen der Form

$$A'' \operatorname{Cos} m \operatorname{Cos} n + B'' \operatorname{Sin} m \operatorname{Cos} n + C'' \operatorname{Sin} n - 1 = \frac{D''}{R+r}$$

$$A''' \operatorname{Cos} m \operatorname{Cos} n + B''' \operatorname{Sin} m \operatorname{Cos} n + C''' \operatorname{Sin} n - 1 = \frac{D'''}{R+r},$$

und aus diesen drey Gleichungen erhält man durch die Elimination von $R + r$ wieder zwey Gleichungen der Form (4).

Soll die Kugel drey Ebenen, und eine Kugel berühren, so hat man drey Gleichungen der Form

$$A'' \operatorname{Cos} m \operatorname{Cos} n + B'' \operatorname{Sin} m \operatorname{Cos} n + C'' \operatorname{Sin} n - 1 = \frac{D''}{R+r},$$

aus welchen man durch die Elimination zwey Gleichungen wie (4) erhalten wird.

Soll endlich die Kugel vier Ebenen berühren, so hat man vier Gleichungen des ersten Grades von der Form

$$R = \frac{Lx + My + Nz + P}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}},$$

aus welchen man leicht die vier unbekannten Grössen x y z und R bestimmen wird.

Drittes Capitel.

Berührung der Curven.

1. §. Zwey ebene Curven seyen durch die Gleichungen $U = o$ und $U' = o$ gegeben, wo $U = o$, für die erste dieser Curven eine Function der rechtwinklichten Coordinaten x y, und $U' = o$ für die zweyte eine Function der Coordinaten x′ y′ ist. Der Anfangspunct der Coordinaten sey für beyde derselbe, und die Achsen der x und x′ sollen in einander fallen.

Wenn diese Curven in irgend einem Puncte sich schneiden, so gehören zu dem, beyden Curven gemeinschaftlichen Durchnittspuncte die Ordinaten $x = x'$ und $y = y'$. Für einen nächstfolgenden Werth $x + \omega$ der Grösse x aber gehört in der ersten Curve die Ordinate

$$y + \omega . \frac{dy}{dx} + \frac{\omega^2}{1.2} . \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\omega^3}{1.2.3} . \frac{d^3y}{dx^3} + \ldots ,$$

und in der zweyten die Ordinate

$$y' + \omega . \frac{dy'}{dx'} + \frac{\omega^2}{1.2} . \frac{d^2y'}{dx'^2} + \frac{\omega^3}{1.2.3} . \frac{d^3y'}{dx'^3} + \ldots$$

Also ist für diesen nächstfolgenden Punct die Differenz der beyen Ordinaten, da $y = y'$ war,

$$\omega \left(\frac{dy'}{dx'} - \frac{dy}{dx}\right) + \frac{\omega^2}{1.2}\left(\frac{d^2y'}{dx'^2} - \frac{d^2y}{dx^2}\right) + \ldots$$
$$+ \frac{\omega^n}{1.2.3\ldots n}\left(\frac{d^ny'}{dx'^n} - \frac{d^ny}{dx^n}\right) + \ldots$$

Diess voraus gesetzt, sey die Gleichung $U = o$ der ersten Curve eine gegebene Gleichung zwischen x y, und bestimmten Constanten, während die Gleichung $U' = o$ der zweyten Curve eine Function von x′ y′ und einer Anzahl von unbestimmten Constanten

ist, welche letztere erst durch gegebene Bedingungen der Aufgabe zu bestimmen sind, so dass also die erste Curve durch ihre Gleichung vollständig, die zweyte aber nur in Beziehung auf ihre Gattung oder auf ihre Form, nicht aber in Beziehung auf ihre Grösse und Lage gegeben ist.

Nimmt man also an, dass die erste Curve in dem Puncte, dessen Coordinaten x y sind, von der zweyten geschnitten werden soll, so wird man nach dem Vorgehenden die Bedingungsgleichungen haben

$$x = x' \text{ und } y = y'.$$

Nimmt man überdiess an, dass man für denselben Punct beyder Curven noch die Bedingungsgleichung habe

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy'}{dx'} \ldots\ldots (I),$$

so wird die Differenz der nächstfolgenden Ordinaten

$$\Delta = \frac{\omega^2}{1.2}\left(\frac{d^2y'}{dx'^2} - \frac{d^2y}{dx^2}\right) + \frac{\omega^3}{1.2.3}\left(\frac{d^3y'}{dx'^3} - \frac{d^3y}{dx^3}\right) + \ldots$$

seyn, und man sagt, dass in diesem letzten Falle beyde Curven in dem genannten Puncte eine Berührung der *ersten* Ordnung haben, d. h. dass man durch diesen Punct zwischen jenen beyden Curven keine andere dritte Curve ziehen kann, wenn diese dritte Curve nicht zugleich derselben Bedingungsgleichung genug thut, die zwischen den beyden ersten Statt hat. In der That ist die Gleichung der dritten Curve durch die den vorigen analogen Coordinaten x″ y″ gegeben, so hat man, da sie durch den gegebenen Punct gehen soll, $x'' = x$, $y'' = y$, also für den nächstfolgenden Punct die Differenz der Ordinaten der ersten und dritten Curve:

$$D = \omega\left(\frac{dy''}{dx''} - \frac{dy}{dx}\right) + \frac{\omega^2}{1.2}\left(\frac{d^2y''}{dx''^2} - \frac{d^2y}{dx^2}\right) + \ldots\ldots,$$

in welchem Ausdrucke man die Grösse ω offenbar immer so klein nehmen kann, dass D grösser als Δ werde, dass also auch die dritte Curve nicht zwischen den beyden

ersten durchgehen kann, ausser wenn auch für sie $\frac{dy''}{dx''} = \frac{dy}{dx}$, und daher auch $\frac{dy''}{dx''} = \frac{dy'}{dx'}$ ist.

Die Gleichung $\frac{dy}{dx} = \frac{dy'}{dx'}$ wird daher in der gegebenen Gleichung $U' = o$ der zweyten Curve eine ihrer Constanten so bestimmen, dass diese zweyte Curve mit der ersten eine Berührung der ersten Ordnung habe. Nimmt man ferner an, dass zwischen diesen beyden Curven nebst der Gleichung $\frac{dy}{dx} = \frac{dy'}{dx'}$ auch noch die zweyte Bedingungsgleichung Statt habe:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y'}{dx'^2} \; \ldots \; (II),$$

so wird keine andere Curve zwischen jenen beyden durchgehen können, wenn nicht für diese andere Curve dieselben zwey Bedingungsgleichungen Statt haben, oder jene beyden ersten Curven werden in dem ihnen gemeinschaftlichen Puncte eine Berührung der *zweyten* Ordnung haben u. s. f. für die Berührungen höherer Ordnungen. Beyspiele werden diess deutlicher machen.

2. §. Die Gleichung einer Curve zwischen x und y sey gegeben. Man suche die Gleichung einer Geraden, die mit der gegebenen Curve eine Berührung der ersten Ordnung hat.

Die allgemeine Gleichung einer Geraden ist:

$$y' = Ax' + B.$$

Da sie durch den Punct der Curve gehen soll, dessen Coordinaten x und y sind, so ist auch

$$y = Ax + B,$$

und da sie mit dieser Curve eine Berührung der ersten Ordnung haben soll, so ist:

$$\frac{dy'}{dx'} = A, \text{ also die Gleichung (I.)}$$

$$\frac{dy}{dx} = A.$$

Die beyden Gleichungen $y = Ax + B$, und $\frac{dy}{dx} = A$ bestimmen die Werthe der Constanten A und B, so dass man hat

$$A = \frac{dy}{dx}$$

$$B = y - x \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Substituirt man daher diese Werthe in der ersten Gleichung, so erhält man für die gesuchte Gerade, oder für die *Tangente* der gegebenen Curve, die Gleichung

$$y' - y = (x' - x) \frac{dy}{dx} \dots \text{(III.)}.$$

Es sey die gegebene Curve eine Ellipse, deren halbe Achsen a und b sind, so ist die Gleichung der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

also $\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$ und daher die Gleichung der Tangente der Ellipse

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 1,$$

wo x' y' die veränderlichen Coordinaten der gesuchten geraden Linie sind, während die Werthe von x und y für jeden gegebenen Punct der Curve constant bleiben.

I. Um an eine gegebene Curve in einem gegebenen Punct M derselben eine Tangente zu ziehen, wird man den Punct T suchen, in welchem die Achse der x von der Tangente geschnitten wird. Setzt man in der Gleichung (III.) der Tangente die Grösse $y' = 0$, so ist die Ordinate x' des Punctes T

$$x' = x - y \cdot \frac{dx}{dy},$$

und man nennt die Entfernung des Punctes T von dem Puncte P, in welchem die Achse der x von der Ordinate y geschnitten wird, die *Subtangente* der Curve in dem gegebenen Puncte M, die also gleich

$$x - x' = y \cdot \frac{dx}{dy}$$

ist, so wie die Entfernung der Puncte M und T, oder die Grösse der Tangente gleich ist

$$y\sqrt{1+\frac{dx^2}{dy^2}}.$$

Eine Gerade durch den gegebenen Punct M, senkrecht auf die Tangente in diesem Puncte, wird daher die Gleichung haben (Cap. I.)

$$y' - y = -(x' - x)\frac{dx}{dy}.$$

Endlich heisst die Entfernung des gegebenen Punctes M der Curve von dem Puncte N, in welchem diese senkrechte Gerade die Achse der x schneidet, die *Normale*, so wie die Entfernung der Puncte N und P die *Subnormale*, so dass man hat

$$\text{Subnormale} = y\,.\,\frac{dy}{dx},\ \text{Normale} = y\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}.$$

Für den Kreis, dessen Halbmesser a ist, hat man

$$\text{Subtangente} = \frac{y\,dx}{dy} = -\frac{y^2}{x}$$

$$\text{Subnormale} = \frac{y\,dy}{dx} = -x$$

$$\text{Tangente} = \frac{y\,ds}{dy} = \frac{ay}{x}$$

$$\text{Normale} = \frac{y\,ds}{dx} = a,$$

wo der Kürze wegen $ds^2 = dx^2 + dy^2$ gesetzt worden ist.

3. §. Wir wollen nun eben so den Kreis suchen, der mit einer gegebenen Curve eine Berührung der ersten Ordnung hat.

Sind x' y' die Coordinaten des Kreises, und a b die Coordinaten des Mittelpunctes, so wie c der Halbmesser desselben, so ist die Gleichung des Kreises

$$(x' - a)^2 + (y' - b)^2 = c^2.$$

Da dieser Kreis durch den Punct x y der gegebenen Curve gehen soll, so hat man:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = c^2,$$

und da er mit der Curve eine Berührung der ersten Ordnung haben soll, so ist

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(x-a)}{y-b}.$$

Die beyden letzten Gleichungen enthalten die Bedingungen der Aufgabe, und sie reichen hin, zwey der Constanten a b c zu bestimmen. Man erhält so z. B.

$$a = x - c \cdot \frac{dy}{ds}$$

$$b = y - c \cdot \frac{dx}{ds},$$

wo wieder $ds^2 = dx^2 + dy^2$ ist. Daher ist die Gleichung des gesuchten tangirenden Kreises

$$(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + \frac{2c}{ds}[(x'-x)dy + (y'-y)dx] = 0,$$

wo wieder x' y' die veränderlichen Coordinaten des Kreises sind, und wo die Werthe x y dx dy aus der Gleichung der gegebenen Curve bestimmt werden.

Aus den gefundenen Werthen von a und b sieht man, dass die Mittelpuncte aller Kreise, welche mit der gegebenen Curve eine Berührung der ersten Ordnung haben, auf der Normale der gegebenen Curve liegen, und dass der Halbmesser c dieser Kreise, also auch der Ort dieser Mittelpuncte in der Normale willkührlich ist.

4. §. Da also nach dem Vorhergehenden ein Kreis durch die Bedingung, dass er mit einer gegebenen Curve eine Berührung der ersten Ordnung haben soll, nicht vollständig bestimmt wird, so wollen wir den Kreis suchen, der mit einer gegebenen Curve in einem gegebenen Puncte derselben eine Berührung der zweyten Ordnung hat. Man nennt diesen Kreis den *Krümmungskreis* der gegebenen Curve.

Die Gleichung des Kreises ist, wie §. 3

$$(x'-a)^2 + (y'-b)^2 = c^2.$$

Da er durch den Punct x y der gegebenen Curve gehen soll, so ist:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=c^2.$$

Da endlich die ersten und zweyten Differenzialien dieses Kreises mit denen der Curve übereinstimmen sollen, so ist

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{(x-a)}{y-b},\text{ und}$$

$$\frac{dx\,d^2y-dy\,d^2x}{dx^2}=\frac{(x-a)\,dy-(y-b)\,dx}{(y-b)^2},$$

wenn kein Differenzial constant gesetzt wird.

Die drey letzten Gleichungen bestimmen die Werthe von a b und c, damit der Kreis mit der Curve eine Berührung der zweyten Ordnung habe. Man findet:

$$x-a=\frac{(dx^2+dy^2)\,dy}{dx\,d^2y-dy\,d^2x}$$

$$y-b=-\frac{(dx^2+dy^2)\,dx}{dx\,d^2y-dy\,d^2x}$$

$$c=\frac{(dx^2+dy^2)^{3/2}}{dx\,d^2y-dy\,d^2x}.$$

Ist dx constant, so gehen diese Werthe von a b c in folgende über, wo $ds^2=dx^2+dy^2$ ist,

$$a-x=-\frac{ds^2\,.\,dy}{d^2y\,.\,dx}$$

$$b-y=\frac{ds^2}{d^2y}$$

$$c=\frac{ds^3}{d^2y\,dx}.$$

I. Aus dem Vorhergehenden sieht man, dass der Mittelpunct des Krümmungskreises einer Curve zugleich der Durchschnittspunct zweyer nächsten Normalen dieser Curve ist. Die Gleichung der Normale zwischen den veränderlichen Coordinaten x′ y′ ist aber (§. 2)

$$y'-y+(x'-x)\frac{dx}{dy}=0$$

Um den Durchschnittspunct dieser Normale mit der nächstfolgenden Normale zu finden, wird man die letzte Gleichung in Beziehung auf x und y differentiiren, wodurch man erhält:

$$ds^2 + (y' - y)\, d^2 y = 0.$$

Sucht man aus den beyden letzten Gleichungen die Werthe von $(x' - x)$ und $(y' - y)$, und substituirt sie in der Gleichung

$$c = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2},$$

so erhält man

$$c = \frac{ds^3}{dx\, d^2 y}, \text{ wie zuvor.}$$

II. Sucht man den Winkel α, welchen diese beyden nächsten Normalen, oder was dasselbe ist, welchen beyde nächste Tangenten der Curve in dem gegebenen Puncte bilden, so seyen A und B die Cosinus der Winkel der ersten Tangente mit den Achsen der x und y, also auch $A + dA$, $B + dB$ dieselben Winkel der zweyten Tangente, und daher (Cap. I.)

$$\cos \alpha = A(A + dA) + B(B + dB).$$

Da aber die Coordinaten x y rechtwinklicht sind, so hat man (a. a. O.)

$$A^2 + B^2 = 1$$

$$(A + dA)^2 + (B + dB)^2 = 1, \text{ oder}$$

$$A\,dA + B\,dB = -\tfrac{1}{2}(dA^2 + dB^2).$$

Diess vorausgesetzt wird der vorhergehende Werth von $\cos \alpha$ in folgenden übergehen

$$\sin^2 \alpha = -2(A\,dA + B\,dB) - (A\,dA + B\,dB)^2,$$

oder wenn man die vierten und höhern Potenzen von dA, dB vernachlässiget,

$$\sin^2 \alpha = dA^2 + dB^2.$$

Es ist aber, wenn $ds^2 = dx^2 + dy^2$ ist,

$$A = \frac{dx}{ds} \text{ und } B = \frac{dy}{ds}, \text{ also ist Sin. } \alpha \text{ oder}$$

$$\alpha = \sqrt{\left(d.\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d.\frac{dy}{ds}\right)^2}.$$

Ist aber so der Winkel α gefunden, so ist der Halbmesser des Krümmungskreises

$$c = \frac{ds}{\alpha}, \text{ oder}$$

$$c = \frac{ds}{\sqrt{\left(d.\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d.\frac{dy}{ds}\right)^2}}$$

welcher Ausdruck mit dem oben gefundenen

$$c = \frac{ds^3}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}$$

identisch ist, wenn man in dem letzten die Grösse $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ constant setzt.

Man nennt den Winkel α von zwey nächsten Tangenten einer Curve den Winkel der *Contingenz* der Curve.

III. Ex. Für die Apollonische Parabel ist $y^2 = mx$, also die Coordinaten des Mittelpunctes des Krümmungskreises

$$a = 3x + \tfrac{1}{2}m$$

$$b = -4x\sqrt{\frac{x}{m}}$$

und der Krümmungshalbmesser der Parabel

$$c = \frac{(4x + m)^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{m}}$$

Für die Cyclois ist, wenn r der Halbmesser des erzeugenden Kreises ist:

$$y = \sqrt{2rx - x^2} + \text{Arc. Sin. vers. } x,$$

also $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sqrt{2r - x}}{x}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-r}{x\sqrt{2rx - x^2}}$$

und daher

$$a = 4r - x$$

$$b = \text{Arc. Sin. vers. } x - \sqrt{2rx - x^2}$$

$$c = 2\sqrt{4r^2 - 2rx}$$

5. §. Da die Gleichung der geraden Linie nur zwey, und die des Kreises nur 3 Constanten enthält, so kann die erste nur eine Berührung der ersten Ordnung, und der zweyte nur eine der zweyten Ordnung mit einer gegebenen Curve haben. Um daher auch ein Beyspiel für die Berührungen der höheren Ordnung zu geben, wollen wir die cubische Parabel zu Grunde legen, deren Gleichung ist:

$$y' = A + Bx' + Cx'^2 + Dx'^3,$$

und ihre Constanten so bestimmen, dass sie mit einer gegebenen Curve eine Berührung der dritten Ordnung habe.

Zu diesem Zwecke wird man die vier Grössen A B C D aus den vier Gleichungen suchen:

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$$

$$\frac{dy}{dx} = B + 2Cx + 3Dx^2$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2C + 6Dx$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 6D,$$

wodurch man erhält:

$$D = \frac{1}{6}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)$$

$$C = \frac{1}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) - \frac{x}{2}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)$$

$$B = \left(\frac{dy}{dx}\right) - x\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + \frac{x}{2}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)$$

$$A = y - x\left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{x^2}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) - \frac{x^3}{6}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right).$$

und die gesuchte Gleichung der cubischen Parabel wird seyn:

$$y' = y + (x' - x)\left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{(x'-x)^2}{1.2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + \frac{(x'-x)^3}{1.2.3}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right).$$

I. Sucht man eben so die Gleichung der höhern Parabel

$$y' = A + Bx' + Cx'^2 + \ldots + Px'^n,$$

welche mit einer gegebenen Curve eine Berührung der n^{ten} Ordnung hat, so findet man, wenn man das angezeigte Verfahren fortsetzt:

$$y' = y + (x' - x)\left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{(x'-x)^2}{1.2} \cdot \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + \ldots \\ + \frac{(x'-x)^n}{1.2.3\ldots n}\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right),$$

wo $x'y'$ die veränderlichen Coordinaten der berührenden Parabel sind, und wo die Werthe von $x\ y\ \left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ aus der Gleichung $y = fx$ der gegebenen Curve genommen werden.

6. §. Das Vorhergehende lässt sich auch leicht auf Curven von doppelter Krümmung fortsetzen. Sind $F(x\ y\ z) = o$ und $f(x\ y\ z) = o$ zwey Gleichungen zwischen den rechtwinklichten Coordinaten $x\ y\ z$, deren also jede für eine krumme Fläche gehört, so gehört das System beyder Gleichungen zusammen betrachtet für den Durchschnitt beyder Flächen oder für eine Curve, die im Allgemeinen von doppelter Krümmung seyn wird. Eliminirt man aus diesen beyden Gleichungen die Grösse z oder y oder x, so erhält man die Gleichungen der Projection dieser Curve in der Ebene der xy, xz oder yz, welche Gleichungen bekanntlich zugleich für die Cylinder gehören, die auf diesen Projectionen senkrecht auf die coordinirten Ebenen der xy, xz oder yz errichtet werden, so dass die Curve von doppelter Krümmung als der Durchschnitt je zweyer dieser Cylinder betrachtet werden kann.

Es seyen also $y = \varphi x$, und $z = \psi x$ die Gleichungen der Curve von doppelter Krümmung, oder die ihrer Projectionen in den Ebenen der xy und xz, wo je zwey der Coordinaten z. B. z und y als eine Function der dritten x betrachtet werden, so hat man, wenn x in $x + \omega$ übergeht, für die beyden andern Coordinaten die Werthe:

$$y + \omega . \frac{dy}{dx} + \frac{\omega^2}{1.2} . \frac{d^2y}{dx^2} + \ldots \text{ und}$$

$$z + \omega . \frac{dz}{dx} + \frac{\omega^2}{1.2} . \frac{d^2z}{dx^2} + \ldots$$

Für eine zweyte Curve, deren analoge Coordinaten x' y' z' sind, hat man eben so, wenn x' in $x' + \omega$ übergeht,

$$y' + \omega . \frac{dy'}{dx'} + \frac{\omega^2}{1.2} . \frac{d^2y'}{dx'^2} + \ldots$$

$$z' + \omega . \frac{dz'}{dx'} + \frac{\omega^2}{1.2} . \frac{d^2z'}{dx'^2} + \ldots$$

Vergleicht man die Werthe der Coordinaten y z und y' z' in beyden Curven, so hat man, wie oben für ebene Curven, wenn die zweyte mit der ersten in dem Puncte, dessen Coordinaten $x' = x$, $y' = y$, $z' = z$ sind, eine Berührung der ersten Ordnung haben soll, die zwey Bedingungsgleichungen

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{dy}{dx} \quad \text{und} \quad \frac{dz'}{dx'} = \frac{dz}{dx},$$

welchen Ausdrücken man für eine Berührung der zweyten Ordnung noch die beyden folgenden hinzufügen wird:

$$\frac{d^2y'}{dx'^2} = \frac{d^2y}{dx^2} \quad \text{und} \quad \frac{d^2z'}{dx'^2} = \frac{d^2z}{dx^2} \text{ u. s. w.}$$

I. Ist daher die Curve von doppelter Krümmung

$$y = \varphi x, \quad z = \psi x$$

gegeben, und sucht man die Gerade, welche mit jener Curve eine Berührung der ersten Ordnung hat, d. h. sucht man die *Tangente* der gegebenen Curve von doppelter Krümmung, so werden die Gleichungen der gesuchten Geraden die Form haben:

$$y' = ax' + \alpha$$
$$z' = bx' + \beta.$$

Die Bedingung, dass diese Gerade durch den Punct der Curve gehen soll, deren Coordinaten x y z sind, gibt

$$y' - y = a(x' - x)$$
$$z' - z = b(x' - x),$$

und die Bedingung, dass die Gerade mit der Curve eine Berührung der ersten Ordnung haben soll, gibt

$$a = \frac{dy}{dx}$$

$$b = \frac{dz}{dx}.$$

Also sind die gesuchten Gleichungen der Tangente

$$\left.\begin{aligned} y' - y &= (x' - x)\frac{dy}{dx} \\ (z' - z) &= (x' - x)\frac{dz}{dx} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (IV)$$

wo x' y' z' die veränderlichen Coordinaten der Tangente sind.

Sucht man aber die Gleichungen der Geraden, welche in demselben Puncte auf der gegebenen Curve d. h. auf der Tangente der Curve senkrecht steht, so werden die Gleichungen dieser *Normale* der Curve die Form haben:

$$x' = az' + \alpha$$
$$y' = bz' + \beta.$$

Die Bedingung, dass die Normale durch den Punct $x\,y\,z$ der Curve geht, gibt

$$x = az + \alpha$$
$$y = bz + \beta$$

und die Bedingung, dass sie auf der Tangente der Curve senkrecht steht, gibt (Cap. I.)

$$1 + a\left(\frac{dx}{dz}\right) + b\left(\frac{dy}{dz}\right) = 0.$$

Die drey letzten Bedingungsgleichungen reichen aber nicht hin, alle vier Constanten a b α β der Normale zu bestimmen. In der That ist die Aufgabe unbestimmt, da es eine unzählige Menge von Geraden gibt, die durch den gegebenen Punct der Curve senkrecht auf die Tangente derselben gezogen werden können. Nimmt man eine dieser vier Grössen z. B. β als willkührlich an, so hat man für die übrigen

$$a = \left(\frac{\beta - y}{z}\right)\frac{dy}{dx} - \frac{dz}{dx}$$

$$b = -\left(\frac{\beta - y}{z}\right)$$

$$\alpha = x - (\beta - y)\frac{dy}{dx} + z \cdot \left(\frac{dz}{dx}\right).$$

7. §. Man suche den Kreis, der mit einer gegebenen Curve eine Berührung der zweyten Ordnung hat.

Da nicht nur die Grösse dieses Kreises, sein Halbmesser und der Ort seines Mittelpunctes, sondern auch die Lage seiner Ebene im Raume zu bestimmen ist, so wollen wir für die Gleichung des Kreises das System einer Kugel und einer durch den Mittelpunct dieser Kugel gelegten Ebene wählen. Ist r der Halbmesser der Kugel, und a b c die den x y z parallelen Coordinaten des Mittelpunctes derselben, so ist die Gleichung der Kugel

$$r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2.$$

Die Gleichung einer Ebene aber, die durch den Mittelpunct der Kugel geht, ist

$$x - a + (y - b) A + (z - c) B = o,$$

wo A B zwey Constanten sind, welche die Lage dieser Ebene ausdrücken. Soll der Kreis, der durch den Schnitt dieser Ebene mit der Kugel gegeben ist, mit einer Curve von doppelter Krümmung eine Berührung der zweyten Ordnung haben, oder soll r der *Krümmungshalbmesser* der Curve seyn, so müssen nach dem Vorhergehenden nicht nur die Werthe von x y z, welche aus diesen beyden Gleichungen folgen, sondern auch ihre ersten und zweyten Differentialien mit jener der gegebenen Curve identisch seyn. Differentiirt man daher diese beyden Gleichungen zweymahl, ohne irgend ein Differential constant vorauszusetzen, so hat man:

$$(x - a)\,dx + (y - b)\,dy + (z - c)\,dz = o$$

$$dx + A\,dy + B\,dz = o$$

$$(x-a)\,d^2x + (y-b)\,d^2y + (z-c)\,d^2z + dx^2 + dy^2 + dz^2 = o$$
$$d^2x + A\,d^2y + B\,d^2z = o.$$

Die vierte und sechste dieser Gleichungen enthalten nur die beyden Grössen A und B, sie geben daher sofort:

$$A = \frac{dz\,d^2x - dx\,d^2z}{dy\,d^2z - dz\,d^2y},$$

$$B = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dy\,d^2z - dz\,d^2y}.$$

Substituirt man diese Werthe von A und B in der zweyten jener Gleichungen, so gibt die zweyte, dritte und fünfte, welche Gleichungen bloss die drey unbekannten Grössen a b c enthalten, folgende Werthe dieser Grössen:

$$a - x = \frac{ds^2}{C}\left[(dy^2 + dz^2)\,d^2x - (dy\,d^2y + dz\,d^2z)\,dx\right]$$

$$b - y = \frac{ds^2}{C}\left[(dx^2 + dz^2)\,d^2y - (dx\,d^2x + dz\,d^2z)\,dy\right]$$

$$c - z = \frac{ds^2}{C}\left[(dx^2 + dy^2)\,d^2z - (dx\,d^2x + dy\,d^2y)\,dz\right]$$

wenn man der Kürze wegen setzt

$$C = ds^2(d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2) - (dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z)^2$$
$$\text{und } ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Substituirt man endlich diese Werthe von a b c in der ersten der gegebenen Gleichungen, so hat man

$$r = \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2}, \text{ oder}$$

$$r = \frac{ds^3}{\sqrt{(dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2 + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)^2 + (dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2}}$$

In den vorhergehenden Ausdrücken wurde kein erstes Differential als constant angenommen. Setzt man also $ds = d\,.\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = o$ oder

$$dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z = o, \text{ so hat man}$$
$$C = ds^2\,(d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2) \text{ und daher}$$

$$a - x = \frac{ds^2\,d^2x}{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2} = r^2 \cdot \frac{d^2x}{ds^2}$$

$$b - y = \frac{ds^2 \cdot d^2y}{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2} = r^2 \cdot \frac{d^2y}{ds^2}$$

$$c - z = \frac{ds^2\, d^2z}{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2} = r^2 \cdot \frac{d^2z}{ds^2}$$

$$r = \frac{ds^2}{\sqrt{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2}}.$$

8. §. Man suche den Winkel der Contingenz (§. 4) einer Curve von doppelter Krümmung.

Sind A B C die Cosinus der Winkel, welche die erste Tangente mit den drey Achsen der Coordinaten bildet, also $A + dA$, $B + dB$, $C + dC$ dieselben Winkel der zweyten Tangente; heisst ferner α der Winkel beyder Tangenten, oder der Winkel der Contingenz, so ist bekanntlich:

$\text{Cos}\,\alpha = A\,(A + dA) + B\,(B + dB) + C\,(C + dC)$, und da die drey Coordinaten unter einander rechtwinklicht sind, so ist:

$$A^2 + B^2 + C^2 = 1, \text{ und}$$

$$(A + dA)^2 + (B + dB)^2 + (C + dC)^2 = 1, \text{ oder}$$

$$A\,dA + B\,dB + C\,dC = -\tfrac{1}{2}\,(dA^2 + dB^2 + dC^2)$$

Da aber der vorhergehende Ausdruck von $\text{Cos}\,\alpha$ gibt

$$\text{Sin}^2\,\alpha = -2\,(A\,dA + B\,dB + C\,dC) - (A\,dA + B\,dB + C\,dC)^2,$$

so hat man, wenn man die vierten und höhern Potenzen von dA, dB, dC weglässt,

$$\text{Sin}^2\,\alpha = dA^2 + dB^2 + dC^2.$$

Es ist aber $A = \frac{dx}{ds}$, $B = \frac{dy}{ds}$, $C = \frac{dz}{ds}$, also wenn man den Bogen für den Sinus nimmt:

$$\alpha = \sqrt{\left(d \cdot \frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d \cdot \frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d \cdot \frac{dz}{ds}\right)^2}$$

welches der gesuchte Ausdruck des Winkels der Contingenz ist.

Heisst endlich r der Halbmesser der Krümmung der gegebenen Curve, so ist

$$r = \frac{ds}{\alpha}, \text{ oder}$$

$$r = \frac{ds}{\sqrt{\left(d.\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d.\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d.\frac{dz}{ds}\right)^2}},$$

welcher Ausdruck mit dem oben gefundenen identisch ist.

9. §. Wir wollen nun die vorgehenden Betrachtungen auf einige interessante Aufgaben anwenden.

So wie wir im 2. §. u. f. für jede gegebene Curve die Tangente, Normale, den Krümmungshalbmesser u. f. gesucht haben, so kann man umgekehrt die Curven suchen, deren Tangenten Normalen u. f. eine gegebene Grösse sind.

Sucht man z. B. die Curve, deren Subtangente constant und gleich a ist, so hat man

$$\frac{y\,dx}{dy} = a.$$

Das Integral dieser Gleichung ist:

$$C + x = a.\log.y,$$

wo C die willkürliche Constante der Integration bezeichnet. Ist $y = c$ für $x = 0$, so ist $C = a \log.c$, und die Gleichung der gesuchten Curve ist

$$x = a.\log.\frac{y}{c}$$

die sogenannte logarithmische Linie.

Sucht man die Curve, deren Subtangente gleich der doppelten Abscisse ist, so hat man

$$y\,dx = 2x\,dy,$$

also, wenn x und y zugleich verschwindet,

$$Cx = y^2$$

die Apollonische Parabel.

Sucht man die Curve, deren Subnormale constant, und gleich a ist, so ist

$$y\,dy = a\,dx$$

$$\text{also } y^2 = C + 2ax$$

wieder die Apollonische Parabel.

Man suche endlich die Curve, deren Krümmungshalbmesser sich wie der Würfel der Normale verhalte.

Nimmt man von dem Ausdrucke des Krümmungshalbmessers

$$r = \pm \frac{ds^3}{dx\,d^2y}$$

das untere Zeichen, und nennt N die Normale, so ist $N = \frac{y\,ds}{dx}$, und die Bedingung der Aufgabe ist in der Gleichung enthalten

$$c^2 = \frac{N^3}{r},$$

wo c^2 eine Constante ist. Man hat daher

$$c^2 = -\frac{y^3\,d^2y}{dx^2}, \quad \text{oder}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{c^2}{y^3}.$$

Multiplicirt man diese Gleichung durch $\frac{2\,dy}{dx}$, und integrirt, so erhält man

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = C + \frac{c^2}{y^2}, \quad \text{oder}$$

$$\frac{y\,dy}{\sqrt{C^2 + c^2}} = dx$$

wovon das Integral ist

$$\frac{1}{C}\cdot\sqrt{Cy^2 + c^2} = C' + x,$$

wo C, C′ die Constanten der Integration bezeichnen. Nimmt man an, dass x und y zugleich verschwinden, so ist

$$CC' = c,$$

also die gesuchte Gleichung

$$y^2 = 2cx + Cx^2;$$

oder die gesuchte Curve ist ein Kegelschnitt, und zwar eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel, wenn C negativ, positiv oder Null ist.

10. §. Man suche die Curve, deren Normale sich verhält, wie die Quadratwurzel aus der Summe der Abscisse und Subnormale.

Ist b eine constante Grösse, so ist nach der Bedingung der Aufgabe:

$$\text{Norm.} = \sqrt{b\,(x + \text{Subnorm.})}, \text{ oder}$$

$$y\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = \sqrt{b\left(x + \frac{y\,dy}{dx}\right)}$$

Sucht man daraus den Werth von $\frac{y\,dy}{dx}$, so hat man

$$\frac{y\,dy}{dx} = \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + bx - y^2}, \text{ oder}$$

$$\frac{b - \frac{2y\,dy}{dx}}{2\sqrt{\frac{b^2}{4} + bx - y^2}} + 1 = 0,$$

wovon das Integral ist

$$x + \sqrt{\frac{b^2}{4} + bx - y^2} = C, \text{ oder}$$

$$\frac{b^2}{4} + bx - y^2 = (C - x)^2$$

die Gleichung des Kreises. Setzt man die Constante der Integration $C = 2\,(a - b)$, so hat man

$$y^2 + (x - a)^2 = ab,$$

und der Halbmesser des Kreises ist $\sqrt{ab}$.

11. §. Die Spitze eines geradlinichten Winkels bewege sich auf der Peripherie einer Ellipse, während seine beyden Schenkel eine andere concentrische Ellipse berühren, die mit der vorigen eine gleiche Lage

hat. Man suche die Curve, welche die Sehne immer tangirt, die durch die beyden Berührungspuncte der zweyten Ellipse mit den Schenkeln des Winkels geht.

Es sey $A^2x^2 + B^2y^2 = 1 \ldots\ldots (V.)$

die Gleichung der von dem Winkel tangirten Ellipse, und

$$y = Px + Q$$

die Gleichung der tangirenden Geraden.

Da der Scheitel des Winkels durch einen Punct der ersten Ellipse gehen soll, dessen Coordinaten z. B. a und b sind, so ist:

$$b = Pa + Q,$$

also die Gleichung der Geraden:

$$y - b = P\,(x - a).$$

Da ferner diese Gerade die zweyte Ellipse berühren soll, so müssen die Werthe von $\frac{dy}{dx}$ aus der letzten Gleichung und der Gleichung (V) einander gleich seyn, wodurch man erhält:

$$P = -\frac{A^2x}{B^2y},$$

also ist die Gleichung der tangirenden Geraden:

$$y - b + \frac{A^2x}{B^2y}(x - a) = 0, \text{ oder}$$

$$A^2ax + B^2by = 1 \ldots\ldots (VI.),$$

und diese Gleichung ist die Gleichung der geraden Sehne, welche durch die beyden Berührungspuncte der zweyten Ellipse geht, für irgend eine Lage des Scheitels des Winkels, welche Lage durch die beyden Grössen a und b gegeben ist.

Wenn der Scheitel des Winkels aus dieser ersten Lage in die nächstfolgende übergeht, so wird auch die Sehne in ihre nächstfolgende Lage übergehen, und die vorige Sehne in irgend einem Puncte schneiden. Um diesen Durchschnittspunct der zwey nächsten Sehnen zu erhalten: wird man die Gleichung (VI.) bloss in

Beziehung auf a und b differentiiren, wodurch man erhält:

$$A^2 x\,da + B^2 y\,db = 0.$$

Da aber der Scheitel des Winkels nach der Bedingung der Aufgabe sich auf einer Ellipse bewegen soll, so sey die Gleichung dieser Ellipse

$$A'^2 a^2 + B'^2 b^2 = 1 \ldots . (VII),$$

und die Werthe von $\frac{db}{da}$ aus den beyden letzten Gleichungen müssen identisch seyn, wodurch man erhält:

$$A'^2 B^2 a y - A^2 B'^2 b x = 0 \ldots . (VIII),$$

und die Gleichungen (VI), (VII) und (VIII) sind die gesuchten. Sucht man aus (VI) und (VIII) die Werthe von x und y, so erhält man den Ort des Durchschnittspunctes von je zwey nächsten Sehnen, nähmlich:

$$x = \frac{A'^2 a}{A^2 (A'^2 a^2 + B'^2 b^2)}, \quad y = \frac{B'^2 b}{B^2 (A'^2 a^2 + B'^2 b^2)}$$

oder nach (VII)

$$x = \frac{A'^2 a}{A^2}, \quad y = \frac{B'^2 b}{B^2}.$$

Diese Durchschnittspuncte hängen aber noch von den Werthen der Grössen a und b, d. h. von der Lage des Scheitels des beweglichen Winkels ab. Sucht man daher den Ort des Durchschnittspunctes unabhängig von diesen Werthen, d. h. sucht man die Aufeinanderfolge dieser Durchschnittspuncte, so wird man die Grössen a und b aus den drey Gleichungen (VI), (VII), (VIII) eliminiren, wodurch man eine Gleichung in x und y erhält, welche für die Curve gehören muss, in welcher alle jene Durchschnittspuncte je zwey nächster Sehnen liegen, d. h. welche für die gesuchte Curve gehören wird, zu der jene Sehne in jeder Lage Tangente ist. Diese Elimination gibt

$$A'^2 B'^2 = A^4 B'^2 x^2 + A'^2 B^4 y^2,$$

und die gesuchte Curve ist daher wieder eine Ellipse,

welche mit den beyden vorhergehenden Ellipsen concentrisch ist, und mit ihnen dieselbe Lage hat.

Nennt man a b die halbe grosse und kleine Achse der ersten Ellipse, in welcher sich der Scheitel des Winkels bewegt; und sind a'b' dieselben Grössen für die zweyte Ellipse, welche von den Schenkeln des beweglichen Winkels tangirt wird, und endlich a''b'' für die gesuchte dritte Ellipse, so hat man

$$aA = bB = a'A' = B'b' = 1, \text{ und}$$

$$a'' = \frac{A'}{A^2} = \frac{a^2}{a'}, \quad b'' = \frac{B'}{B^2} = \frac{b^2}{b'}$$

oder die Achsen der dritten Ellipse sind die dritten Proportionalen zu den analogen Achsen der beyden ersten Ellipsen.

Wären die beyden ersten Ellipsen Kreise, und $a = b = r$; $a' = b' = r'$, so wäre auch die dritte ein den beyden vorhergehenden concentrischer Kreis, dessen Halbmesser gleich $\frac{r^2}{r'}$ ist.

I. Soll der Scheitel des Winkels, statt auf der Peripherie einer Ellipse, auf einer geraden Linie sich bewegen, deren Gleichung

$$b = Ma + N. \ldots (IX)$$

ist, so hat man $\frac{db}{da} = M$, und da nach dem Vorhergehenden

$$\frac{db}{da} = -\frac{A^2 x}{B^2 y} \text{ war,}$$

so ist auch $A^2x + MB^2y = 0 \ldots (X)$.

Verbindet man damit die obige Gleichung

$$A^2ax + B^2by = 1 \ldots (XI)$$

so hat man die mit den vorigen analogen Gleichungen (IX), (X), (XI), welche die Aufgabe auflösen. Sucht man die Werthe von x und y aus (X) und (XI), so erhält man

$$x = -\frac{M}{A^2 N}, \quad \text{und } y = +\frac{1}{B^2 . N},$$

und da diese Coordinaten des Durchschnittspunctes zweyer nächsten Sehnen von a und b unabhängig sind, so folgt daraus, dass, wenn der Scheitel des Winkels sich in einer geraden Linie bewegt, die Sehne immer durch einen und denselben Punct geht, dessen Coordinaten x y durch die zwey letzten Gleichungen gegeben werden.

12. §. Eine gegebene krumme Fläche werde von einer Reihe paralleler Ebenen geschnitten. Man suche die Gleichung der Curve, die auf allen Schnitten der Fläche mit den parallelen Ebenen senkrecht steht.

Ohne der Allgemeinheit der Aufgabe Eintrag zu thun, kann man voraussetzen, dass die schneidenden Ebenen mit der coordinirten Ebene der x y parallel sind. Da die Curve, welche wir suchen, auf der gegebenen Fläche liegt, so werden wir die Gleichungen dieser Curve vollkommen kennen, wenn wir nur die Projection derselben auf der Ebene der x y kennen, denn die andere Gleichung dieser Curve wird die Gleichung der gegebenen krummen Fläche selbst seyn. Es sey also $y = F . x$ die Gleichung dieser Projection.

Damit die gesuchte Curve, und der mit x y parallele Schnitt auf einander senkrecht seyen, müssen ihre Tangenten auf einander senkrecht seyn, und es ist klar, dass dieser Bedingung genug geschieht, wenn nur die Projectionen der Tangenten in der Ebene der x y auf einander senkrecht stehen.

Sind also $y = a x + \alpha$, $y = a' x + \alpha'$ die Gleichungen dieser Projectionen, so muss $1 + a a' = 0$ seyn. Es ist aber $a = \frac{dy}{dx}$, wo nähmlich dieser Coefficient $\frac{dy}{dx}$ aus der Gleichung $y = F . x$ genommen wird. Ferner ist eben so $a' = \left(\frac{dy}{dx}\right)$, wo dieser Coefficient aus der gegebenen Gleichung der Fläche genommen wird,

indem man diese Gleichung in Beziehung auf x und y differentiirt, oder z constant setzt.

Man hat daher für die Gleichung der Projection der gesuchten Curve

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot \frac{dy}{dx} = 0,$$

wo, wie gesagt, $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ eine endliche Function von x und y (aus der Gleichung der gegebenen Fläche) ist, und wo $\frac{dy}{dx}$ unveränderlich bleibt. Diese letzte Gleichung muss also noch integrirt werden, und die Constante der Integration kann man dadurch bestimmen, dass die gesuchte Curve durch einen gegebenen Punct der Fläche gehet.

Ex. I. Die Gleichung der Fläche, welche durch Revolution einer Curve um die Achse der z entsteht, ist

$$x^2 + y^2 = \varphi z,$$

wo φz irgend eine Function von z bezeichnet. Das Differential dieser Gleichung in Beziehung auf x und y gibt

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = -\frac{x}{y},$$

also ist die Gleichung der gesuchten Curve

$$1 - \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0, \text{ oder}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{y}{dy} \text{ und deren Integral: } x = By,$$

also die Projection der gesuchten Curve in der Ebene der x y eine gerade Linie, die durch den Anfang der Coordinaten geht. Man sieht, dass diese Gleichung zugleich die Gleichung der Projection einer Lage der Curve ist, durch deren Umdrehung die gegebene Fläche entstand. In der That steht die, diese Fläche erzeugende Curve immer auf den Kreisen senkrecht, die jeder Punct der erzeugenden Curve um die Achse der z beschreibt.

Ex. II. Ist die Gleichung der gegebenen Fläche

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1,$$

so hat man

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = -\frac{Ax}{By},$$

also die gesuchte Curve

$$\frac{B\,dx}{x} = \frac{A\,dy}{y}, \text{ oder deren Integral}$$

$$x^B = D \,.\, y^A,$$

wo D die Constante der Integration bezeichnet.

13. §. Eine gerade Linie bewegt sich in einer Ebene nach einem gegebenen Gesetze. Man suche die Curve, welche von jener Geraden in allen ihren Puncten unter einem gegebenen Winkel α geschnitten wird.

Um das Gesetz der Bewegung der Geraden auszudrücken, kann man annehmen, dass sie immer Tangente einer gegebenen Curve seyn soll. Sey $\frac{dy}{dx} = X$ die Gleichung dieser gegebenen Curve, so ist die Gleichung der gesuchten Curve

$$\frac{dy}{dx} = \text{tg. } \omega \ldots\ldots \text{XII.}$$

wo ω der Winkel der Tangente der gesuchten Curve mit der Achse der x ist. Allein der Winkel ω besteht aus zwey Theilen, deren erster α der gegebene Winkel ist, unter welchem die gesuchte Curve von der Geraden geschnitten werden soll, und deren zweyter β der Winkel der Tangente der gegebenen Curve mit der Achse der x ist, wo man aus der ersten der vorhergehenden Gleichungen hat

$$X = \text{tg. } \beta.$$

Sey eben so $X' = \text{tg. } \alpha$,
so gibt die Gleichung (XII.) für die gesuchte Curve

$$\frac{dy}{dx} = \frac{X' + X}{1 - XX'} \ldots . (\text{XIII}).$$

Ist also der Winkel α ein rechter, oder X' unendlich gross, so ist die Gleichung der gesuchten Curve

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{X} \ldots . (\text{XIV}).$$

Ex. Ist die gegebene Curve eine Parabel, $y^2 = a x$, so ist nach (XIV) die gesuchte Curve

$$y^2 = \frac{16}{9} \cdot \frac{x^3}{a}$$

die Neilische Parabel.

Ist die gegebene Curve ein Kreis, $y^2 + x^2 = a^2$, so ist

$$X = - \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

also die gesuchte Curve nach (XIV)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}$$

die Tractorie.

Ist endlich die gegebene Curve eine logarithmische Spirale, so ist auch die gesuchte Curve eine logarithmische Spirale.

14. §. Wenn man in einer gegebenen Gleichung einer Curve zwischen x, y und einer Constante a, diese Constante nach und nach ändert, so erhält man die Aufeinanderfolge von Curven, die alle zu derselben Gattung gehören, und sich unter einander bloss durch den Werth dieser Constante unterscheiden. Z. B. die Folge von Kreisen, deren Peripherien alle durch einen Punct der Achse der x gehen, deren Mittelpuncte aber in derselben Achse der x verschieden sind. Man suche die Curve, welche alle diese gegebenen Curven unter einem gegebenen Winkel, dessen trigonometrische Tangente gleich m seyn soll, schneidet. Man nennt die gesuchte Curve die Trajectorie.

Ist $F(x, y, a) = o$ die Gleichung der gegebenen Curve, so ist dieser Ausdruck auch zugleich die Gleichung der Trajectorie, vorausgesetzt, dass man im ersten Falle die Grösse a constant, und im zweyten veränderlich setzt.

Die trigonometrische Tangente des Winkels der gegebe-

nen Curve mit der Achse der x ist $\frac{dy}{dx}$. Sey eben so $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ die trigonometrische Tangente des Winkels der Trajectorie mit der Achse der x, so hat man

$$m = \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right) - \frac{dy}{dx}}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot \frac{dy}{dx}} \quad \ldots (XV)$$

wo man den Werth von $\frac{dy}{dx}$ aus der Gleichung

$$F(x, y, a) = o$$

unter der Voraussetzung a = Const. erhält, welcher Werth also durch x y und a gegeben seyn wird. Eben so wird man den Werth von $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ aus der Gleichung F (x, y, a) = o unter der Voraussetzung, dass a veränderlich sey, erhalten. Substituirt man diese Werthe von $\frac{dy}{dx}$ und $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ in der Gleichung (XV), so erhält man eine Gleichung in x y a und da, aus welcher man den Werth von y mittelst der Gleichung F (x y a) = o eliminiren kann. Das Resultat dieser Elimination wird eine Gleichung in x a und d a, deren Integral also eine Gleichung in x und a seyn, aus welcher man den Werth von a durch x bestimmen kann, und dieser Werth von a in der gegebenen Gleichung F (x y a) = o substituirt, wird die gesuchte Gleichung der Trajectorie seyn.

Ex. I. Sey die gegebene Curve eine gerade Linie, deren Gleichung

$$y = ax$$

ist, so hat man

$$\frac{dy}{dx} = a, \text{ und } \left(\frac{dy}{dx}\right) = a + x\frac{da}{dx}.$$

Substituirt man diese Werthe in (XV), so ist

$$\frac{1 - am}{1 + a^2} \cdot da = \frac{m\,dx}{x}.$$

dessen Integral

$$\text{Arc. tg. } a - m \log \sqrt{1+a} + m \log . c = m \log . x,$$

wo c die Constante der Integration ist.

Eliminirt man aus dieser und der gegebenen Gleichung $y = ax$ die Grösse a, so erhält man für die Trajectorie

$$\log . \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{c} = \frac{1}{m} \text{ Arc. tg. } \frac{y}{x}$$

oder die logarithmische Spirale.

Soll die gesuchte Trajectorie die gegebenen geraden Linien unter einem rechten Winkel schneiden, so ist m unendlich, also die Trajectorie

$$\log . \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{c} = 0, \text{ oder } x^2 + y^2 = c^2$$

welches die Gleichung des Kreises ist.

Ex. II. Sind die gegebenen Curven selbst Kreise, deren Gleichung

$$y^2 = 2ax - x^2, \text{ so ist}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a-x}{y} \text{ und } \left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{a-x}{y} + \frac{x}{y} \cdot \frac{da}{dx}.$$

Substituirt man diese Werthe in (XV), und setzt man statt y seinen Werth $\sqrt{2ax - x^2}$, so erhält man

$$ma^2 dx + [m(a-x) - \sqrt{2ax - x^2}]\, x\, da = 0,$$

eine Gleichung, die für a und x homogen ist, also leicht integrirt werden kann. Für m unendlich wird der letzte Ausdruck

$$a^2 dx + (a-x)\, x\, da = 0,$$

dessen Integral $\frac{1}{ax} - \frac{1}{2a^2} = C$, oder

$$a^2 x^2 = C^2 . (2ax - x^2).$$

Aber $y^2 = 2ax - x^2$, also auch $a = \frac{Cy}{x}$,

und dieser Werth in der Gleichung des gegebenen Kreises substituirt, gibt für die Trajectorie

$$x^2 = 2C . y - y^2, \text{ also wieder einen Kreis.}$$

15. §. Eine Folge von Ellipsen, die alle dieselbe

grosse Achse und einen gemeinschaftlichen Mittelpunct haben, soll von einer Curve so geschnitten werden, dass die Fläche des Segments, welches zwischen jeder dieser Ellipsen, und zwischen den Coordinaten x y des Durchschnittspunctes dieser Ellipse mit jener Curve enthalten ist, bey allen Ellipsen eine constante Grösse b^2 sey. Man suche die schneidende Curve.

Ist a die constante halbe grosse Achse der Ellipsen, und p der veränderliche Parameter derselben, so ist die Gleichung jeder Ellipse

$$y^2 = \frac{p}{2a}(2ax - x^2),$$

also der Ausdruck jenes Segments $\int y\,dx$ oder

$$b^2 = \int dx \sqrt{\frac{2apx - px^2}{2a}}.$$

Ist aber allgemein $y = \int Q\,dx$ und Q eine Function von x und einer Constante a, so ist, wenn man auch a als veränderlich ansieht, das vollständige Differential von y gleich:

$$dy = Q\,dx + da . \int \left(\frac{dQ}{da}\right) dx,$$

also ist auch das vollständige Differential des vorhergehenden Ausdruckes für das elliptische Segment in Beziehung auf x und p

$$dx \sqrt{\frac{2apx - px^2}{2a}} + dp \int \frac{dx}{2p} \sqrt{\frac{2apx - px^2}{2a}} = 0,$$

oder wenn man für b^2 den oben gegebenen Werth setzt,

$$dx \sqrt{\frac{2ax - x^2}{2a}} + \frac{b^2\,dp}{2p\sqrt{p}} = 0,$$

welcher Gleichung Integral ist

$$\int dx \sqrt{\frac{2ax - x^2}{2a}} - \frac{b^2}{\sqrt{p}} = 0, \text{ oder}$$

$$y = \frac{b^2 \sqrt{2ax - x^2}}{\int dx \sqrt{(2ax - x^2)}}.$$

die Gleichung der gesuchten schneidenden Curve.

16. §. Eine Folge von Parabeln, die alle denselben Scheitel und dieselbe Achse haben, wird von einer Curve so geschnitten, dass alle parabolischen Bogen zwischen jener Curve und dem Scheitel der Parabel einer constanten Grösse b^2 gleich sind.

Man suche die schneidende Curve.

Ist p der veränderliche Parameter der Parabeln, also ihre Gleichung $y^2 = px$, so gibt die Bedingung der Aufgabe

$$b^2 = \int \frac{dx}{2} \sqrt{\frac{p + 4x}{x}}.$$

Das Differential dieses Ausdruckes in Beziehung auf x und p ist

$$\frac{1}{2} dx \sqrt{\frac{4x + p}{x}} + \frac{dp}{4} \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + px}} = 0.$$

Es ist aber

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + px}} = \frac{4b^2}{p} - \frac{2\sqrt{4x^2 + px}}{p}, \text{ und}$$

$$dp = \frac{2xydy - y^2dx}{x^2},$$

also der vorhergehende Ausdruck

$$xdy - ydx = \frac{b^2(2xdy - ydx)}{\sqrt{4x^2 + y^2}}$$

die Gleichung der gesuchten schneidenden Curve.

M. s. Mémoires présentés à l'Acad. Royale de Paris II. Vol.

17. §. Eine gerade Linie von gegebener Grösse a bewegt sich so, dass ihre beyden Endpuncte immer auf den Schenkeln eines rechten Winkels liegen. Man suche die Curve, welche jene gerade in allen ihren Lagen berührt.

Sind die Schenkel des rechten Winkels die Achsen der Coordinaten x y, und der Scheitel desselben der Anfangspunct, so hat man, wenn $ds^2 = dx^2 + dy^2$ ist, für die Grösse der gegebenen Linie den Ausdruck

$$x\frac{ds}{dx}+y\frac{ds}{dy}=a,$$

oder

$$\frac{xdy.ds}{dx^2}-y\frac{ds}{dx}=\frac{ady}{dx}.$$

Dieser Gleichung Differential ist

$$\left(\frac{xds}{dx}-a\right)\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{xdy}{dx}-y\right)\frac{d^2s}{dx^2}=o,$$

oder da man $\frac{d^2s}{dx^2}=\frac{dy\,d^2y}{dx^2.ds}$ hat, so ist

$$\left(\frac{xds}{dx}-a\right)\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{xd.y}{dx}-y\right)\frac{dy\,d^2y}{dx^2.ds}=o.$$

Da aber dieser Ausdruck durch $\frac{d^2y}{dx^2}$ theilbar ist, so ist er folgenden zwey Gleichungen gleichgeltend

$$\left.\begin{array}{l}\frac{d^2y}{dx^2}=o\\ \frac{xds}{dx}-a+\left(\frac{xdy}{dx}-y\right)\frac{dy}{ds}=o\end{array}\right\}\ (a)$$

Die erste dieser Gleichungen (a) gibt nach einer doppelten Integration

$$y=Cx+C'$$

für die Gleichung der gesuchten Curve, die also eine Gerade, und zwar die gegebene Gerade a selbst ist.

Die zweyte der Gleichungen (a) aber gibt, da

$$\frac{xdy}{dx}-y=\frac{ady}{ds}\ \text{ist},$$

$\frac{xds}{dx}-a+\frac{ady^2}{ds^2}=o$, oder da $dy^2=ds^2-dx^2$ ist,

$$\frac{ds}{dx}=\left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$$

und daraus $\frac{ds}{dy}=\pm\frac{a^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}}}$

wo man das untere Zeichen nehmen wird, da s wächst,

wenn y abnimmt. Substituirt man diese Werthe von $\frac{x\,d}{a\,d}$ und $\frac{ds}{dy}$ in der vorhergehenden Gleichung

$$\frac{x\,ds}{dx} + \frac{y\,ds}{dy} = a,$$

so erhält man, weil $-\frac{y\,ds}{dy}$ positiv wird,

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

für die Gleichung der gesuchten Curve.

Beschreibt man aus den vier Ecken eines Quadrats, dessen Seite gleich 2 a ist, als aus Mittelpuncten Kreise mit dem Halbmesser gleich a, so schneiden sich diese Kreise in den Mitten der Seiten des Quadrats, und was von der Peripherie dieser vier Kreise in dem Quadrate enthalten ist, hat die Form der gesuchten Curve. Es ist merkwürdig, dass diese Aufgabe bloss durch Differentiation ohne Integralrechnung aufgelöst werden konnte, und wir werden weiter unten (Cap. VI und VII) Gelegenheit haben, auf denselben Gegenstand wieder zurückzukommen.

Viertes Capitel.

Berührung der Flächen und normale Ebenen der Curven von doppelter Krümmung.

1. §. Eine Gleichung zwischen den rechtwinklichten Coordinaten x y z und constanten Grössen gehört für eine Fläche. In dieser Gleichung sind zwey dieser Grössen x y willkührlich, und die dritte z wird durch jene zwey bestimmt, während in den *beyden* Gleichungen einer krummen Linie (III §. 6) immer zwey dieser Coordinaten durch die dritte bestimmt werden. Differentiirt man die Gleichung der Fläche bloss in Beziehung auf z und x, so erhält man das *partielle* Differential $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ für den Schnitt der Fläche mit einer der x z parallelen Ebene. Eben so ist $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ das partielle Differential der gegebenen Gleichung für einen Schnitt der Fläche mit einer der y z parallelen Ebene. Wir wollen der Kürze wegen

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = p \text{ und } \left(\frac{dz}{dy}\right) = q,$$

und überdiess

$$\left(\frac{dp}{dx}\right) = r, \left(\frac{dp}{dy}\right) = \left(\frac{dq}{dx}\right) = s \text{ und } \left(\frac{dq}{dy}\right) = t$$

setzen, wo also

$$r = \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right), s = \left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right), t = \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) \text{ ist.}$$

Diess vorausgesetzt ist das erste Differential der Gleichung der Fläche

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

und das zweyte

$$d^2 z = r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2,$$

weil $dp = r\,dx + s\,dy$ und $dq = s\,dx + t\,dy$ ist.

Geht nun in der gegebenen Gleichung einer Fläche x in $x + dx$ und y in $y + dy$ über, so geht bekanntlich z über in

$$z + p\,dx + q\,dy + \frac{1}{1 \cdot 2}(r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2) + \ldots$$

Für eine zweyte Gleichung in $x'\,y'\,z'$ einer andern Fläche, welche durch den Punct der ersten geht, dessen Coordinaten x y z sind, hat man eben so, wenn $x = x'$ in $x + dx$ und $y = y'$ in $y + dy$ übergeht, für den neuen Werth von $z = z'$

$$z + p'dx + q'dy + \frac{1}{1 \cdot 2}(r'dx^2 + 2s'dx\,dy + t'dy^2) + \ldots$$

Enthält aber die zweyte Gleichung mehrere Constanten, so kann man diese Constanten so bestimmen, dass $p' = p$ und $q' = q$ ist, wodurch beyde Flächen eine Berührung der ersten Ordnung erhalten, so dass in dem Berührungspuncte keine andere dritte Fläche zwischen den beyden vorhergehenden durchgehen kann, wenn diese dritte Fläche nicht auch denselben zwey Bedingungsgleichungen $p' = p$, $q' = q$ genug thut. Eben so werden die beyden ersten Flächen eine Berührung der zweyten Ordnung erhalten, wenn nebst den beyden vorhergehenden Bedingungsgleichungen noch die drey folgenden

$$r' = r,\ s' = s,\ t' = t$$

Statt haben u. f.

2. §. Man suche die Ebene, welche mit einer gegebenen Fläche $z = f(x, y)$ eine Berührung der ersten Ordnung hat.

Die Gleichung der Ebene wird die Form haben

$$z' = Ax' + By' + D,$$

wo x′ y′ z′ die veränderlichen Coordinaten der Ebene sind.

Die Bedingung, dass die *tangirende Ebene* durch den Punct der gegebenen Fläche geht, dessen Coordinaten x y z sind, gibt

$$z = Ax + By + D,$$

und die Bedingung, dass die Ebene mit der Fläche eine Berührung der ersten Ordnung hat, gibt

$$\left(\frac{dz'}{dx'}\right) = \left(\frac{dz}{dx}\right), \quad \left(\frac{dz'}{dy'}\right) = \left(\frac{dz}{dy}\right)$$

oder, was dasselbe ist,

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = A, \quad \left(\frac{dz}{dy}\right) = B,$$

und diese drey Gleichungen bestimmen die drey Grössen A, B, D, so dass man für die Gleichung der gesuchten tangirenden Ebene hat

$$z' - z = (x' - x)\left(\frac{dz}{dx}\right) + (y' - y)\left(\frac{dz}{dy}\right)$$

Ex. Die Gleichung des Ellipsoids ist

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

also ist $\left(\frac{dz}{dx}\right) = -\frac{c^2 x}{a^2 z}$, $\left(\frac{dz}{dy}\right) = -\frac{c^2 y}{b^2 z}$,

und daher die Gleichung der berührenden Ebene

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} + \frac{zz'}{c^2} = 1.$$

Setzt man in der Gleichung der tangirenden Ebene eine der Coordinaten x′ y′ z′ gleich Null, so erhält man die Knotenlinie der tangirenden Ebene in der coordinirten Ebene der beyden andern Coordinaten.

3. §. Man suche die Gleichungen der geraden Linie, welche in einem gegebenen Punct einer Fläche, dessen Coordinaten x y z sind, auf der Fläche senkrecht steht.

Da diese *Normale* auf der tangirenden Ebene in demselben Puncte senkrecht steht, so sind ihre Gleichungen, (nach Cap. II.)

$$x' - x + (z' - z)\left(\frac{dz}{dx}\right) = 0$$

$$y' - y + (z' - z)\left(\frac{dz}{dy}\right) = 0,$$

wo x' y' z' die veränderlichen Coordinaten der Normale sind.

Die Entfernung dieses Punctes x y z der Fläche von irgend einem Puncte x'' y'' z'' der Normale ist

$$\sqrt{(x'' - x)^2 + (y'' - y)^2 + (z'' - z)^2} =$$

$$(z'' - z). \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}.$$

Ist in diesem Ausdrucke $z'' = 0$, so erhält man für die Länge der Normale zwischen dem gegebenen Punct der Fläche und dem Puncte, wo die Normale die Ebene der x y trifft, den Ausdruck

$$-z. \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}.$$

4. §. Unter allen Geraden, welche in der tangirenden Ebene durch den Berührungspunct dieser Ebene mit der Fläche gehen, die zu suchen, welche mit der Ebene der x y den grössten Winkel bildet.

Die Knotenlinie der tangirenden Ebene mit der Ebene der x y ist

$$-z = (x' - x)\left(\frac{dz}{dx}\right) + (y' - y)\left(\frac{dz}{dy}\right),$$

und da die gesuchte Gerade auf dieser Knotenlinie senkrecht stehen muss, so ist (nach Cap. II.) die Gleichung der gesuchten Geraden

$$(y' - y)\left(\frac{dz}{dx}\right) = (x' - x)\left(\frac{dz}{dy}\right).$$

5. §. Man suche die Berührung einer Kugel mit einer gegebenen Fläche.

Sind a b c die Coordinaten des Mittelpunctes, und R der Halbmesser der Kugel, so ist

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$

und da diese Gleichung nur vier Constanten enthält, so ist die Kugel zu einer Berührung der zweyten Ordnung nicht hinreichend. Für eine Berührung der ersten Ordnung aber hat man

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{x-a}{z-c}$$

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{y-b}{z-c}.$$

Sucht man aus diesen drey Gleichungen die Werthe von a, b, c, so findet man

$$a = x + \frac{pR}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

$$b = y + \frac{qR}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

$$c = z - \frac{R}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Bestimmt man also die Werthe von p q aus der Gleichung der gegebenen Fläche, und substituirt sie in den angezeigten Werthen von a b c, so erhält man die Coordinaten a b c des Mittelpunctes einer Kugel, die mit der Fläche eine Berührung der ersten Ordnung hat: der Halbmesser der Kugel ist willkührlich.

Man kann aber auch annehmen, dass für die gesuchte Kugel auch die Summe aller Glieder der oben (§. 1) angegebenen Reihe verschwinde, welche in dx^2, $dx\,dy$ und dy^2 multiplicirt sind. Diese Annahme gibt, wenn man $\frac{dy}{dx} = \omega$ setzt,

$$\left(\frac{d^2z'}{dx'^2} - \frac{d^2z}{dx^2}\right) + 2\omega\left(\frac{d^2z'}{dx'dy'} - \frac{d^2z}{dx\,dy}\right)$$

$$+ \omega^2\left(\frac{d^2z'}{dy'^2} - \frac{d^2z}{dy^2}\right) = 0.$$

Für die Kugel aber ist

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{1+p^2}{c-z}$$

$$\frac{d^2 z}{d y^2} = \frac{1 + q^2}{c - z}$$

$$\frac{d^2 z}{dx\,dy} = \frac{p q}{c - z}$$

Behält man daher die oben angenommene Bezeichnung der Grössen r s t bey, so ist unsere Bedingungsgleichung

$$r + 2\omega s + \omega^2 t = \frac{1 + p^2 + 2\omega \cdot p q + \omega^2 (1 + q^2)}{c - z}$$

und da $c - z = - \frac{R}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$ ist, so hat man

$$R = \frac{-[1 + p^2 + 2 p q \omega + (1 + q^2)\omega^2] \cdot \sqrt{1 + p^2 + q^2}}{r + 2 s \omega + \omega^2 t}$$

und diess ist der Ausdruck des Halbmessers einer Kugel, welche die Eigenschaft hat, dass keine andere Kugel zwischen ihr und der gegebenen Fläche in dem Puncte durchgehen kann, der zu den Coordinaten $x + dx$, $y + dy$ gehört. In diesem Ausdrucke ist aber die Grösse $\omega = \frac{dy}{dx}$ willkührlich. Gibt man daher dieser Grösse ω irgend einen bestimmten Werth, so wird die erwähnte Eigenschaft der Kugel für alle die Puncte gelten, für welche ω denselben Werth hat, d. h. für alle Puncte der Curve, die in dem Durchschnitte einer ihrer Lage nach gegebenen, auf x y senkrechten Ebene, mit der gegebenen Fläche liegen.

Da das Verhältniss von ω willkührlich ist, so wollen wir denjenigen Werth von ω suchen, für welchen R ein Grösstes oder ein Kleinstes wird.

Der oben gefundene Ausdruck von R ist auch

$$R = \frac{-[1 + \omega^2 + (p + q\omega)^2] \cdot \sqrt{1 + p^2 + q^2}}{r + 2 s \omega + t \omega^2}$$

und da zugleich

$$c - z = \frac{-R}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \text{ ist,}$$

so entspricht der grösste oder kleinste Werth von R zugleich dem grössten oder kleinsten Werthe von c. Eliminirt man daher die Grösse R aus den beyden vorhergehenden Gleichungen, so ist

$$1 + \omega^2 + (p + q\,\omega)^2 = (c - z)\,(r + 2\,s\,\omega + t\,\omega^2)\;..(I).$$

Differentiirt man aber die letzte Gleichung in Beziehung auf c und ω, und setzt dc gleich Null, so erhält man

$$\omega + (p + q\,\omega)\,q - (s + t\,\omega)\,(z - c) = o\ldots(II),$$

welche Gleichung durch ω multiplicirt, und von (I) subtrahirt, gibt

$$1 + p^2 + p\,q\,\omega - (r + s\,\omega)\,(z - c) = o\ldots(III).$$

Eliminirt man aus (II) und (III) die Grösse $(z - c)$, so erhält man für ω eine Gleichung der Form

$$A\omega^2 + B\omega - C = o\ldots(IV)$$

$$\text{wo } A = (1 + q^2)\,s - p\,q\,t$$
$$B = (1 + q^2)\,r - (1 + p^2)\,t$$
$$C = (1 + p^2)\,s - p\,q\,r.$$

Löst man diese Gleichung auf, so ist

$$\omega = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 + 4AC}}{2A}$$

Der gefundene Werth von $\omega = \frac{dy}{dx}$ gehört also unter allen krummen Linien, welche durch den Berührungspunct in der Fläche gezogen werden können, für jene, welche die grösste oder kleinste Krümmung haben. Da A B C Functionen von x und y sind, so wird das Integral der letzten Gleichung die Gleichung der Projection jener Curve in der Ebene der x y seyn, und man sieht, dass, da der Werth von ω doppelt ist, jedem Puncte der Fläche zwey solche Curven entsprechen. Differentiirt man den vorhergehenden Ausdruck von R noch einmahl, so findet man leicht, dass in der letzten Gleichung das obere positive Zeichen für den grössten, und das untere negative für den kleinsten Werth von R gehöre, *dass also unter allen Curven, die durch einen Punct*

der Fläche in dieser Fläche gezogen werden können, immer zwey sind, deren eine die grösste, die andere die kleinste Krümmung hat.

Um die Krümmungshalbmesser dieser beyden Curven zu erhalten, wird man den gefundenen Werth von ω in dem oben gegebenen Ausdrucke von R substituiren. Zu diesem Zwecke wird man am bequemsten so verfahren.

Multiplicirt man die Gleichung (II) durch s, und (III) durch t, so ist die Differenz beyder Producte

$$z - c = \frac{-(1+p^2)t + pqs + A\omega}{s^2 - rt}.$$

Substituirt man in diesem Ausdrucke den oben gefundenen Werth von ω, und setzt der Kürze wegen

$$h = (1+p^2)t + (1+q^2)r - 2pqs,$$

so erhält man

$$z - c = \frac{-h + \sqrt{B^2 + 4AC}}{2(rt - s^2)},$$

und daher auch

$$R = \frac{[-h + \sqrt{B^2 + 4AC}] \cdot \sqrt{1 + p^2 + q^2}}{2(rt - s^2)}.$$

Setzt man aber

$$k^2 = 1 + p^2 + q^2, \text{ und}$$
$$g = rt - s^2,$$

so ist $B^2 + 4AC = h^2 - 4k^2 \cdot g$, also

$$z - c = \frac{-h + \sqrt{h^2 - 4k^2 \cdot g}}{2g},$$

und daher der gesuchte grösste und kleinste Halbmesser der Krümmung

$$R = \frac{k}{2g}[-h + \sqrt{h^2 - 4k^2 g}] = \frac{-2k^3}{h + \sqrt{h^2 - 4k^2 g}}$$

I. Da die Lage der Ebene der xy willkührlich ist, so kann man annehmen, dass sie der, die Fläche in dem gegebenen Puncte tangirenden Ebene parallel ist. Unter dieser Voraussetzung ist $\left(\frac{dz}{dx}\right) = \left(\frac{dz}{dy}\right) = 0$,

oder $p = q = 0$. Sind aber α und β die zwey Werthe von ω aus der Gleichung

$$A\omega^2 + B\omega - C = 0,$$

das heisst, sind α und β die trigonometrischen Tangenten der Winkel, welche die beyden Curven in dem gegebenen Puncte der Fläche mit der Achse der x bilden, so ist (Cap. I.) die Tangente des Winkels, welchen beyde Curven unter einander in dem gegebenen Puncte bilden, gleich

$$\frac{\alpha - \beta}{1 + \alpha\beta} \text{ oder } \frac{\sqrt{B^2 + 4AC}}{A - C},$$

und da für $p = q = 0$, auch $A - C = 0$ ist, so ist die Tangente des letzten Winkels unendlich, oder *die beyden Curven der grössten und kleinsten Krümmung in irgend einem Puncte einer krummen Fläche stehen auf einander senkrecht.*

6. §. Die vorhergehende Annahme, dass die Ebene der xy mit der tangirenden Ebene parallel ist, gibt ein Mittel, die Resultate der gegenwärtigen Betrachtungen auf eine sehr einfache Weise zu erhalten.

Denkt man sich durch den Berührungspunct, der zugleich der Anfang der Coordinaten seyn soll, eine Ebene senkrecht auf die coordinirte Ebene der xy, so wird diese Ebene die Fläche in einer Curve schneiden, und die Gleichung der Projection dieser Curve in der Ebene der xy wird die Form haben $y = \omega x$. Es sey R der Krümmungshalbmesser dieser Curve.

Wir haben aber bereits im III. Cap. den allgemeinen Ausdruck des Krümmungshalbmessers einer Curve von doppelter Krümmung gegeben. Er ist, wenn man dx constant voraussetzt, gleich

$$R = \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2 + dx^2d^2z^2 + dx^2d^2y^2}}.$$

Da aber, der vorhergehenden Annahme gemäss, die Ebene der xy parallel mit der tangirenden Ebene der

Fläche in dem Anfangspuncte der Coordinaten ist, oder da die Achse der z die Normale der Fläche in diesem Puncte ist, so ist auch $dz = 0$. Endlich gibt die Gleichung $y = \omega x$, wenn man sie zwey Mahl differentiirt, $d^2y = \omega d^2x$, und da $d^2x = 0$ ist, so ist auch $d^2y = 0$, also erhält der Krümmungshalbmesser folgenden sehr einfachen Ausdruck

$$R = \frac{dx^2 + dy^2}{d^2z}.$$

Es ist aber $\frac{dy}{dx} = \omega$, und wenn man die vorige Bezeichnung der Grössen r, s, t beybehält,

$$d^2z = r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2, \text{ oder}$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = r + 2s\omega + t\omega^2, \text{ also auch}$$

$$R = \frac{1 + \omega^2}{r + 2s\omega + t\omega^2} \quad \ldots\ldots \quad (V)$$

und die Grösse dieses Halbmessers hängt offenbar von dem Werthe der trigonometrischen Tangente ω ab, der variiren kann, während die Grössen r s t constant bleiben. Um den grössten und kleinsten Krümmungshalbmesser aller normalen Schnitte der Fläche in diesem Puncte zu erhalten, hat man $d.R = 0$, woraus folgt

$$\omega^2 + \omega\left(\frac{r - t}{s}\right) - 1 = 0 \ldots (VI)$$

Sind m und m' die Wurzeln dieser Gleichung, so ist

$$mm' + 1 = 0,$$

also gehören die grössten und kleinsten Halbmesser zu Schnitten, deren Ebenen auf einander senkrecht sind, wie zuvor.

Die Werthe des grössten und kleinsten Halbmessers selbst sind daher

$$\rho = \frac{1 + m^2}{r + 2sm + tm^2} \text{ und } \rho' = \frac{1 + m'^2}{r + 2sm' + tm'^2}.$$

Da aber, nach dem Vorhergehenden, die beyden Curven der grössten und kleinsten Krümmung in Ebenen liegen, die auf einander senkrecht stehen, so kann

man annehmen, dass diese zwey Ebenen die coordinirten Ebenen der xz und yz sind.

Dadurch erhält man $m = o$, und $m' = \infty$, also auch

$$\rho = \frac{1}{r} \text{ und } \rho' = \frac{1}{t} \quad . \; . \; . \; (VII)$$

und da die Voraussetzung $m = \frac{1}{m'} = o$, auch $s = o$ gibt, so ist nach der Gleichung (V)

$$R = \frac{1 + \omega^2}{r + t\omega^2}.$$

Ist aber $\omega = \text{tg.} \, \varphi$, oder $\text{Sin}^2 \varphi = \frac{\omega^2}{1 + \omega^2}$,

$\text{Cos}^2 \varphi = \frac{1}{1 + \omega^2}$, so hat man

$$R = \frac{1 + \omega^2}{\frac{1}{\rho} + \frac{\omega^2}{\rho'}} = \frac{\rho \rho'}{\frac{\rho . \omega^2}{1 + \omega^2} + \frac{\rho'}{1 + \omega^2}} \text{ oder}$$

$$R = \frac{\rho \rho'}{\rho \, \text{Sin}^2 \varphi + \rho' \, \text{Cos}^2 \varphi}, \text{ oder endlich}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\rho} \text{Cos}^2 \varphi + \frac{1}{\rho'} \text{Sin}^2 \varphi \; . \; . \; . \; . \; (VIII),$$

so wie $\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} = r + t$.

I. Eliminirt man diese Grösse ω aus den Gleichungen (V) und (VI), so erhält man

$$(rt - s^2) R^2 - (r + t) R + 1 = o,$$

woraus man für den Werth der grössten und kleinsten Krümmung findet

$$R = \frac{2}{r + t \pm \sqrt{4 s^2 + (t - r)^2}} \; . \; . \; . \; (IX)$$

Setzt man aber in dem Ausdrucke des Halbmessers der grössten und kleinsten Krümmung, welchen wir im 5. §. erhalten haben,

$$R = \frac{k}{2g} [- h + \sqrt{h^2 - 4k^2 . g}]$$

die Grössen p und q gleich Null, so ist

$$g = rt - s^2, \; h = r + t \text{ und } k = 1, \text{ also}$$

der letzte Ausdruck

$$R = \frac{-(r+t) + \sqrt{(r+t)^2 - 4(rt - s^2)}}{2(rt - s^2)}, \text{ oder}$$

$$R = \frac{2}{r + t + \sqrt{4s^2 + (r-t)^2}} \text{ wie zuvor.}$$

II. Wir wollen nun durch denselben Punct der Fläche, durch welche die auf x y normale schneidende Ebene geht, noch eine andere schiefe Ebene legen, welche mit der normalen Ebene den Winkel ϑ bildet, und den Krümmungshalbmesser R' dieses schiefen Schnittes suchen.

Der grösseren Einfachheit wegen setzen wir voraus, dass beyde Schnitte dieselbe Tangente haben, und dass diese Tangente die Achse der x ist. So enthält die Ebene der x z den normalen Schnitt, und der Halbmesser dieses Schnittes ist

$$R = \frac{dx^2}{d^2z}.$$

Der Halbmesser des schiefen Schnittes aber ist

$$R' = \frac{dx^2}{d^2z'}, \text{ wenn } z' = \frac{z}{\cos\vartheta} \text{ ist.}$$

Es ist also $\frac{d^2z'}{dx^2} = \frac{d^2z}{dx^2 \cos\vartheta}$, und daher

$$R' = \frac{dx^2}{d^2z} \cdot \cos\vartheta = R \cos\vartheta.$$

7. §. Wir haben (Cap. III §. 6) gesehen, dass die Aufgabe, die Normale einer gegebenen Curve von doppelter Krümmung in einem gegebenen Puncte derselben zu finden, eine unbestimmte Aufgabe ist, da eine unendliche Anzahl von geraden Linien um diesen Punct auf die Curve senkrecht sind. Aber alle diese geraden Linien liegen in einer Ebene, die durch denselben Punct auf die Curve senkrecht steht, und diese Ebene lässt sich bestimmen.

Sind nähmlich $y = \varphi x$ und $z = \psi x$ die Gleichun-

gen der gegebenen Curve, so sind, wie wir gefunden haben, die Gleichungen der Tangente

$$y - y' = (x - x') \frac{dy}{dx}.$$

$$z - z' = (x - x') \frac{dz}{dx},$$

also die Gleichung der Ebene, welche auf dieser Tangente senkrecht steht, oder die Gleichung der auf die Curve normalen Ebene

$$(z - z') \frac{dz}{dx} + (y - y') \frac{dy}{dx} + x - x' = 0,$$

oder

$$(z' - \psi x) \psi' x + (y' - \varphi x) \varphi' x + x' - x = 0,$$

wo $\psi' x = \frac{d.\psi x}{dx}$, $\varphi' x = \frac{d.\varphi x}{dx}$ ist, und wo $x' y' z'$ die veränderlichen Coordinaten der normalen Ebene sind.

8. §. Die Ebene, welche durch zwey nächste Tangenten einer Curve von doppelter Krümmung geht, heisst die *Krümmungsebene* der Curve.

Die Gleichung der Krümmungsebene in dem Puncte der Curve, dessen Coordinaten $x\ y\ z$ sind, wird die Form haben

$$z - z' - B(y - y') - A(x - x') = 0.$$

Differentiirt man diese Gleichung zwey Mahl in Beziehung auf x, so erhält man zwey Gleichungen, und aus ihnen

$$A = \frac{\frac{dz}{dx} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^2z}{dx^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \text{ und } B = \frac{d^2z}{dx^2} : \frac{d^2y}{dx^2}$$

also ist die Gleichung der gesuchten Krümmungsebene

$$(z - z') \frac{d^2y}{dx^2} - (y - y') \frac{d^2z}{dx^2}$$

$$- (x - x') \left(\frac{dz}{dx} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^2z}{dx^2}\right) = 0$$

I. Geht in der letzten Gleichung $x\ y\ z$ in $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ über, so erhält man die Gleichung

der nächstfolgenden Krümmungsebene. Der Winkel, welchen diese beyden nächstfolgenden Krümmungsebenen mit einander bilden, heisst der *Flexionswinkel* der Curve, und man findet den Sinus dieses Flexionswinkels gleich

$$\frac{\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\cdot\frac{d^3 z}{dx^3}-\frac{d^3 y}{dx^3}\cdot\frac{d^2 z}{dx^2}\right).dx.\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}{\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^2+\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right)^2+\left(\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2 z}{dx^2}-\frac{d^2 y}{dx^2}\cdot\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

II. Überhaupt kann man die Curven von doppelter Krümmung als Polygone betrachten, von denen immer drey nächste Seiten nicht in einer Ebene sind. Die Verlängerung einer dieser Seiten gibt die Tangente der Curve, und zwey nächstfolgende Tangenten bestimmen die Lage der Krümmungsebene. Ist die Gleichung dieser Ebene

$$Ax' + By' + Cz' + 1 = o,$$

so wird man, wenn kein Differential beständig angenommen wird, haben

$$Ax + By + Cz + 1 = o$$
$$Adx + Bdy + Cdz = o$$
$$Ad^2x + Bd^2y + Cd^2z = o$$

woraus folgt

$$\frac{A}{C} = \frac{dy\,d^2z - dz\,d^2y}{dx\,d^2y - dy\,d^2x} \text{ und } \frac{B}{C} = \frac{dz\,d^2x - dx\,d^2z}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}$$

und wenn man diese Werthe von $\frac{A}{C}$, $\frac{B}{C}$ in der Differenz der beyden ersten Gleichungen

$$A(x'-x) + B(y'-y) + C(z'-z) = o, \text{ oder}$$
$$\frac{A}{C}(x'-x) + \frac{B}{C}(y'-y) + z' - z = o$$

substituirt, so erhält man für die Gleichung der berührenden Ebene

$$(x'-x)(dy\,d^2z - dz\,d^2y) + (y'-y)(dz\,d^2x - dx\,d^2z)$$
$$+ (z'-z)(dx\,d^2y - dy\,d^2x) = o,$$

welcher Ausdruck mit der oben gefundenen Gleichung

der Krümmungsebene identisch ist, wenn man dx constant voraussetzt.

9. §. Wenn man durch $x\ y\ z$ die Coordinaten eines gegebenen Punctes der Fläche und durch $x'\ y'\ z'$ die des Mittelpunctes einer Kugel bezeichnet, welche durch den Punct $x\ y\ z$ der Fläche geht, und R zum Halbmesser hat, so ist

$$(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2=R^2\ldots(X).$$

Differentiirt man diese Gleichung zuerst in Beziehung auf x, dann auf y, während man $x'\ y'\ z'$ als constant ansieht, so ist

$$x-x'+(z-z')\,p=0\ldots(XI)$$

$$y-y'+(z-z')\,q=0\ldots(XII),$$

welche beyden Gleichungen nach (§. 3) die Gleichungen der Normale der Fläche in dem gegebenen Puncte derselben sind.

Geht man von diesem Punct der Fläche zu einem nächstfolgenden in irgend einer willkührlichen Richtung über, so wird die Normale dieses zweyten Punctes die Normale des ersten in irgend einem Puncte schneiden, *vorausgesetzt, dass die zweyte Normale in derselben Ebene liegt, in welcher die erste sich befindet,* und dieser Durchschnittspunct wird der der ersten Normale seyn, für welchen die Coordinaten $x'\ y'\ z'$ sich nicht ändern, während x und y sich ändert. Denn in den Gleichungen (XI) und (XII) sind $x'\ y'\ z'$ die veränderlichen Coordinaten einer und derselben Normale, während die Grössen $x\,y\,z\,p\,q$, die zu dem Punct der Fläche gehören, für dieselbe Normale constant, und nur dann veränderlich sind, wenn man von einer Normale zu einer andern übergeht. Differentiirt man also (XI) und (XII), indem man $x'\ y'\ z'$ als constant betrachtet, so hat man

$$dx+p\,dz+(z-z')\,dp=0$$

$$dy+q\,dz+(z-z')\,dq=0.$$

Behält man die in §. 1 angenommenen Bezeichnungen der Grössen $p\ q\ r\ s\ t$ bey, so ist

$$dz = p\,dx + q\,dy$$
$$dp = r\,dx + s\,dy$$
$$dq = s\,dx + t\,dy,$$

also die beyden vorigen Gleichungen

$$dx + p^2 dx + pq\,dy + (z - z')(r\,dx + s\,dy) = o$$
$$dy + pq\,dx + q^2 dy + (z - z')(s\,dx + t\,dy) = o,$$

oder auch, wenn man $\frac{dy}{dx}$ aus der ersten, und $z - z'$ aus der zweyten eliminirt, und die in §. 5 angenommene Bezeichnung der Grössen A B C und g h k beybehält

$$g \,.\, (z - z')^2 + h\,(z - z') + k^2 = o \ldots (\text{XIII})$$
$$A \,.\, \frac{dy^2}{dx^2} + B \,.\, \frac{dy}{dx} - C = o \ldots (\text{XIV}).$$

Die vier Gleichungen (XI), (XII), (XIII), (XIV) gehören für den Durchschnittspunct beyder Normalen. Aber da zur Bestimmung der Coordinaten x' y' z' dieses Durchschnittspunctes schon die drey ersten dieser Gleichungen hinreichen, so ist die letzte (XIV), die keine der Coordinaten x' y' z' enthält, nichts anders, als eine Bedingungsgleichung, der Genüge geschehen muss, damit die beyden nächsten Normalen sich schneiden können. Diese letzte Gleichung gibt also den Werth von $\frac{dy}{dx}$, das heisst, die Richtung, in welcher man von dem ersten Puncte der Fläche zu dem zweyten gehen muss, damit die Normale des zweyten Punctes in derselben Ebene mit der Normale des ersten Punctes liege. Da diese Gleichung für $\frac{dy}{dx}$ des zweyten Grades ist, so folgt daraus, dass man im Allgemeinen von jedem Puncte einer Fläche in zwey Richtungen, und nur in zwey, zu einem andern nächstfolgenden Puncte der Fläche übergehen kann, damit die Normalen der beyden neuen Puncte die des ersten irgendwo schneiden, während die Normalen aller andern nächstfolgenden Puncte mit der

Normale des ersten Punctes in verschiedenen Ebenen liegen. Man bemerkt von selbst, dass diese Gleichung (XIV) identisch mit der Gleichung (IV) ist.

Die Gleichung (XIII) gibt

$$z - z' = \frac{-h + \sqrt{h^2 - 4k^2 g}}{2g}.$$

Dieser Werth von $z - z'$ in (XI) und (XII) substituirt, gibt

$$y - y' = q \left(\frac{h - \sqrt{h^2 - 4k^2 g}}{2g}\right)$$

$$x - x' = p \left(\frac{h - \sqrt{h^2 - 4k^2 g}}{2g}\right),$$

und diese Werthe von $z - z'$, $y - y'$, $x - x'$ in (X) substituirt, geben

$$R = \frac{k}{2g} . [- h + \sqrt{h^2 - 4k^2 g}].$$

Da diese Werthe von $x - x'$, $y - y'$, $z - z'$ und R ganz mit denen identisch sind, welche wir oben §. 5 gefunden haben, so folgt, dass der Durchschnitt der zwey nächsten Normalen der *Mittelpunct der Krümmung*, und dass der Theil der Normale zwischen diesem Durchschnittspuncte und dem gegebenen Puncte der Fläche der *Krümmungshalbmesser* der Curve ist, welche auf der Fläche zwischen den beyden nächsten Puncten derselben enthalten ist, dass von allen Curven, welche durch einen Punct der Fläche gezogen werden können, zwey unter einander rechtwinklichte Curven sind, von denen eine den grössten und die andere den kleinsten Krümmungshalbmesser enthält, und endlich, dass dieselben beyden Curven diejenigen sind, deren zwey nächste Normalen immer in einer Ebene liegen, oder sich schneiden. Wir wollen sie die *Krümmungscurven* der Fläche nennen.

I. Jede Normale einer Fläche wird also immer durch zwey nächste Normalen geschnitten, welche letz-

teren in zwey gegen einander senkrechten Ebenen liegen. Wir wollen diese zwey neuen Puncte der Fläche die *correspondirenden Puncte* des anfänglichen Punctes nennen. Geht man also von irgend einem anfänglichen Puncte der Fläche zu *dem ersten* der beyden ihm correspondirenden Puncte über, z. B. zu dem, der dem grössten Krümmungshalbmesser entspricht, wo also die Normalen beyder Puncte sich schneiden; geht man dann von diesem zweyten Puncte, als einen anfänglichen betrachtet, zu *dem ersten* seiner correspondirenden Puncte in demselben Sinne über, und so fort für alle übrigen, so werden die Normalen aller dieser Puncte eine Fläche bilden, die durch die Bewegung einer geraden Linie, der Normale, entstanden ist, welche Fläche überall senkrecht auf der gegebenen Fläche stehen, und diese gegebene Fläche in einer Curve schneiden wird, welche in allen ihren Elementen die *kleinste* Krümmung der gegebenen Fläche enthalten wird. Wiederhohlt man dasselbe Verfahren in demselben Sinne für alle Puncte der gegebenen Fläche, so wird man alle Curven der kleinsten Krümmung erhalten, welche Curven die gegebene Fläche in Zonen von veränderlicher Breite theilen werden.

Geht man dann von demselben anfänglichen Puncte *zu dem zweyten* der beyden ihm correspondirenden Puncte über, d. h. geht man von dem anfänglichen Puncte in dem Elemente der Curve fort, welche den kleinsten Krümmungshalbmesser der Fläche in diesem Puncte enthält; geht man dann von diesem zweyten Punct, als einen anfänglichen betrachtet, wieder *zu dem zweyten* seiner correspondirenden Puncte fort, und so für alle übrigen, so werden die Normalen aller dieser Puncte wieder eine Fläche bilden, die ebenfalls überall senkrecht auf der gegebenen Fläche steht, und diese gegebene Fläche in einer Curve schneidet, welche in allen ihren Elementen die *grösste* Krümmung der gegebenen Fläche enthält. Wiederhohlt man dasselbe Verfahren in dem-

selben Sinne für alle Puncte der gegebenen Fläche, so erhält man alle Curven der grössten Krümmung, welche Curven die gegebene Fläche ebenfalls in Zonen von veränderlicher Breite theilen, und jede dieser Curven der grössten Krümmung wird senkrecht auf die ihr entsprechende Curve der kleinsten Krümmung seyn, so dass die zwey Systeme dieser Curven die gegebene Fläche in Elemente theilen werden, die man als Rechtecke ansehen kann.

Bey einer Fläche, z. B. die durch Revolution einer Curve um eine gerade Linie, als Achse, entstanden ist, sind die Curven der ersten Art alle in den Meridianen der Fläche, oder in den Durchschnitten der Fläche mit einer Ebene enthalten, die durch die Rotations-Achse geht; und die Curven der zweyten Art sind alle Parallelen, oder die Durchschnitte der Fläche mit Ebenen, die senkrecht auf die Rotations-Achse stehen, da in beyden Arten von Curven, aber auch nur in diesen von allen, die auf der Fläche gezogen werden können, immer zwey nächstfolgende Normalen sich schneiden.

Die Gleichung (XIV), welche das Verhältniss zwischen $\frac{dy}{dx}$ und den Grössen p q r s t ausdrückt, welches Statt haben muss, damit die beyden nächsten Normalen sich schneiden, ist also zugleich die Gleichung der Projection der Curve der grössten und kleinsten Krümmung in der Ebene der x y. Hat man also die gegebene Gleichung der Fläche zweymahl differentiirt, um die Werthe von p, q, r, s, t in x und y auszudrücken, so substituirt man diese Werthe in der Gleichung (XIV), wodurch man eine Gleichung zwischen x, y und $\frac{dy}{dx}$ erhält, welche integrirt, die gesuchte Gleichung der Projection der Curven der grössten und kleinsten Krümmung gibt.

Substituirt man in der Gleichung (XIV) für r und t ihre Werthe aus den Gleichungen

$$dp = r\,dx + s\,dy \text{ und}$$
$$dq = s\,dx + t\,dy,$$

so erhält man, da der Factor von s verschwindet,

$$\frac{dy^2}{dx^2}\cdot\frac{pq\,dq}{dy} - \frac{dy}{dx}(1+q^2)\cdot\frac{dp}{dx} + (1+p^2)\frac{dq}{dx} - \frac{p\cdot q\,dp}{dx} = 0,$$

oder

$$dp\,[pq\,dx + (1+q^2)\,dy] = dq\,[pq\,dy + (1+p^2)\,dx]$$
$$dp\,.\,[dy + q\,dz] = dq\,.\,[dx + p\,dz)\ldots(\text{XIV}'),$$

welches ebenfalls die Gleichung der Projection jener beyden Curven ist.

10. §. Die in dem Vorhergehenden betrachteten Eigenschaften der Normalen einer Fläche lassen sich allgemeiner auch auf andere gerade Linien ausdehnen.

Wenn man nähmlich durch alle Puncte einer Fläche gerade Linien im Raume nach irgend einem Gesetze gezogen denkt, so sind von allen, welche *eine erste* dieser Geraden ringsum zunächst umgeben, im Allgemeinen nur zwey, welche jene erste Gerade schneiden, oder mit ihr in derselben Ebene liegen.

Um diess zu beweisen, nehmen wir auf der Fläche, deren Gleichung $dz = p\,dx + q\,dy$ ist, einen Punct an, dessen Coordinaten $x\ y\ z$ sind, so sind die Gleichungen der geraden Linie zwischen den veränderlichen Coordinaten $x'\ y'\ z'$, welche durch jenen Punct geht, von der Form

$$x' - x = L\,(z' - z)$$
$$y' - y = M\,(z' - z),$$

wo L, M bekannte Functionen von x und y des Punctes der Fläche sind, so dass man hat

$$dL = l\,dx + l'dy, \text{ und}$$
$$dM = m\,dx + m'dy,$$

wo wieder l, l' und m, m' gegebene Functionen von x und y bezeichnen.

Wenn diese Gerade von dem Puncte xyz der Fläche zu dem Puncte derselben übergeht, zu dem die Coordinaten $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ gehören, so wird man, um den Durchschnittspunct beyder Geraden zu

erhalten, die beyden ersten Gleichungen unter der Voraussetzung differentiiren, dass $x' y' z'$ beständig ist, wodurch man erhält

$$-dx = (z' - z)\, dL + L\, dz$$
$$-dy = (z' - z)\, dM + M\, dz.$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen die Grösse $(z' - z)$, so ist

$$dz\,(L\,dM - M\,dL) + dx.dM - dy.dL = o,$$

und substituirt man in diesem Ausdrucke für dz, dL, dM ihre Werthe in dx und dy, so hat man

$$(p\,dx + q\,dy)\,[L\,(m\,dx + m'dy) - M\,(l\,dx + l'dy)]$$
$$+ dx\,(m\,dx + m'dy) - dy\,(l\,dx + l'dy) = o$$

oder

$$[q\,(L\,m' - M\,l') - l'].\frac{dy^2}{dx^2}$$
$$+ [L\,(p\,m' + q\,m) - M\,(p\,l' + q\,l) + m' - l].\frac{dy}{dx}$$
$$+ p\,(L\,m - M\,l) + m = o,$$

und da diese Gleichung für $\frac{dy}{dx}$ des zweyten Grades ist, so gibt es im Allgemeinen *nur zwey* Richtungen auf der Fläche, um von der ersten gegebenen Geraden zu einer andern nächsten überzugehen, welche die vorige schneidet. Setzt man in der letzten Gleichung voraus, dass die Grössen p und q constant sind, so stehen alle hier betrachteten Geraden auf einer Ebene. Ist diese Ebene jene der xy, so hat man $p = o$ und $q = o$, und die letzte Gleichung wird $l'.\frac{dy^2}{dx^2} + (l - m').\frac{dy}{dx} - m = o$.

Schöne Anwendungen dieses Satzes s. m. in den *Mémoires présentés à l'Institut de Paris. Tom. II. Janvier* 1811.

11. §. Es sey $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ das Element einer der beyden Krümmungscurven einer gegebenen Fläche, also dx, dy, dz die Projectionen dieser Elemente auf die drey Achsen der Coordinaten. Es seyen ferner $X\ Y\ Z$ die Cosinus der Winkel, welche die Normale der Curve im Anfangspuncte des Elements ds mit

den drey Achsen der Coordinaten bildet, also $X + dX$, $Y + dY$, $Z + dZ$ die Cosinus der Winkel, welche die Normale im Endpuncte jenes Elementes mit denselben Achsen bildet. Da diese beyden Normalen, für die Krümmungscurven, sich schneiden sollen, so kann man aus ihrem Durchschnittspuncte, als Mittelpuncte, mit einem Halbmesser, welcher der Einheit gleich ist, einen kleinen Kreisbogen zwischen diesen Normalen beschreiben, welcher Kreisbogen das Mass des Winkels seyn wird, welchen die beyden Normalen mit einander bilden. Die Projectionen dieses Kreisbogens auf die Achsen der Coordinaten werden dX, dY, dZ seyn, und diese Projectionen werden sich zu den analogen Projectionen des Elements ds verhalten, wie die Einheit zu dem Theile der Normale, welcher zwischen dem Durchschnittspuncte beyder Normalen, und dem Puncte der Fläche enthalten ist, d. h. nach dem Vorhergehenden, wie die Einheit zu dem Krümmungsradius R der Krümmungscurve der Fläche, so dass man hat

$$\frac{dX}{dx} = \frac{1}{R}, \quad \frac{dY}{dy} = \frac{1}{R}, \quad \frac{dZ}{dz} = \frac{1}{R} \ldots . (XV)$$

Diese drey Gleichungen werden hinreichen, den Krümmungsradius sowohl, als die Krümmungscurven selbst zu bestimmen.

I. Die zwey Gleichungen der Krümmungscurve wird man nähmlich erhalten, wenn man aus den Gleichungen (XV) die Grösse R eliminirt. Diese zwey Gleichungen sind daher

$$\left.\begin{aligned} dX\,dy - dY\,dx &= 0 \\ dX\,dz - dZ\,dx &= 0 \end{aligned}\right\} (XVI)$$

Da aber wegen der rechtwinklichten Coordinaten ist

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1, \text{ also auch}$$

$$X\,dX + Y\,dY + Z\,dZ = 0,$$

so kann man mittelst des letzten Ausdruckes und der Gleichungen (XVI) die Grössen dX, dY, dZ eliminiren, wodurch man erhält

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = o,$$

und diese Gleichung gehört zu der Fläche, die man betrachtet. Es ist daher zur Kenntniss der Krümmungscurven hinreichend, nur auf eine ihrer beyden Gleichungen (XVI) Rücksicht zu nehmen. Wählt man die erste, und substituirt in ihr für dX und dY die Werthe

$$\left(\frac{dX}{dx}\right) dx + \left(\frac{dX}{dy}\right) dy \text{ und } \left(\frac{dY}{dx}\right) dx + \left(\frac{dY}{dy}\right) dy,$$

so hat man für die Gleichung der gesuchten Krümmungscurve

$$\left(\frac{dX}{dy}\right) \cdot \frac{dy^2}{dx^2} + \left[\left(\frac{dX}{dx}\right) - \left(\frac{dY}{dy}\right)\right] \cdot \frac{dy}{dx} - \left(\frac{d}{dx}\right) = o \text{ (XVII)}$$

und da diese Gleichung, welche mit der Gleichung (IV) oder mit der Gleichung (XIV) identisch ist, für $\frac{dy}{dx}$ des zweyten Grades ist, so gibt es für jeden Punct einer Fläche zwey Krümmungscurven, wie bekannt.

II. Behält man die oben gegebene Bezeichnung der Grössen $p\ q\ r\ s\ t$ bey, so hat man bekanntlich

$$X = \frac{-p}{k},\ Y = \frac{-q}{k}, \text{ wo } k = \sqrt{1 + p^2 + q^2} \text{ ist,}$$

also auch

$$\left(\frac{dX}{dx}\right) = \frac{pqs - (1+q^2)r}{k^3},\ \left(\frac{dY}{dx}\right) = \frac{pqr - (1+p^2)s}{k^3}$$

$$\left(\frac{dX}{dy}\right) = \frac{pqt - (1+q^2)s}{k^3},\ \left(\frac{dY}{dy}\right) = \frac{pqs - (1+p^2)t}{k^3},$$

oder, wenn man die Bezeichnung der Grössen A, B, C des §. 5 wählt,

$$\left(\frac{dX}{dx}\right) = -A$$

$$\left(\frac{dX}{dx}\right) - \left(\frac{dY}{dy}\right) = -B$$

$$\left(\frac{dY}{dx}\right) = -C$$

und daher die Gleichung (XVII)

$$A \cdot \frac{dy^2}{dx^2} + B \cdot \frac{dy}{dx} - C = o,$$

wie an dem angezeigten Orte.

Man bemerkt von selbst, dass man zwischen den drey Grössen A B C die Relation hat

$$Ar = Bs + Ct.$$

III. Um auch hier zu zeigen, dass die Elemente der beyden Krümmungscurven in jedem Puncte der Fläche auf einander senkrecht stehen, seyen y' y'' und z' z'' die zwey Werthe von $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$ für diese zwey Curven. Die Bedingung, dass sie auf einander senkrecht stehen sollen, ist

$$1 + y'y'' + z'z'' = o.$$

Man hat aber $z' = p + qy'$ und $z'' = p + qy''$, also ist jene Gleichung

$$1 + p^2 + (1 + q^2)\, y'y'' + pq\,(y' + y'') = o.$$

Es ist aber $y'y'' = -\frac{C}{A}$ und $y' + y'' = -\frac{B}{A}$.
also

$$A\,(1 + p^2) - pqB - C\,(1 + q^2) = o,$$

$$\text{und } A = \frac{Bs + Ct}{r} \text{ also auch}$$

$(1 + p^2)\,(Bs + Ct) - pqr.B - C\,(1 + q^2) = o$, oder
$B\,[(1 + p^2)s - pqr] - C\,[(1 + q^2)\,r - (1 + p^2)t] = o$
eine identische Gleichung für die Werthe von B und C.

IV. Diese zwey Krümmungscurven haben noch eine andere merkwürdige Relation. Sind nähmlich d die Differentialien für die eine dieser Curven und δ für die andere, so dass man hat

$$y' = \frac{dy}{dx} \text{ und } y'' = \frac{\delta y}{\delta x},$$

so geht die Gleichung $Ar = Bs + Ct$ in folgende über

$$r - (y' + y'')\, s + y'y''.\, t = o,$$

oder wenn man für y' und y'' ihre Werthe setzt,
$r\,dx\,\delta x + s\,(dx\,\delta y + dy\,\delta x) + t\,\delta y\,dy = o$, oder
$dx\,(r\,\delta x + s\,\delta y) + dy\,(s\,\delta x + t\,\delta y) = o.$

Aber $dp = r\,dx + s\,dy$ und $dq = s\,dx + t\,dy$, also $dx\,\delta p + dy\,\delta q = o \ldots .$ (XVIII), welche Gleichung die gesuchte Relation enthält.

V. Die Gleichung, welche ausdrückt, dass beyde Curven auf einander senkrecht sind, ist

$$1 + y'y'' + z'z'' = 0, \text{ oder auch}$$
$$dx\delta x + dy\delta y + dz\delta z = 0.$$

Aber es ist auch $dz = p\,dx + q\,dy$, also wird die letzte Gleichung

$$dx(\delta x + p\delta z) + dy(\delta y + q\,dz) = 0.$$

Substituirt man in diesem Ausdrucke den Werth von $\frac{dy}{dx}$ aus (XVIII), so hat man, wenn man δ in d verwandelt,

$$dp\,(dy + q\,dz) = dq\,(dx + p\,dz),$$

wie wir auch schon am Ende des §. 9. gefunden haben.

VI. Um endlich noch aus den vorhergehenden Betrachtungen den Werth des Krümmungshalbmessers R abzuleiten, gibt die erste der Gleichungen (XV)

$$\frac{1}{R} = \frac{dX}{dx}, \text{ das heisst}$$
$$\frac{1}{R} = \left(\frac{dX}{dx}\right) + \left(\frac{dX}{dy}\right)\cdot\frac{dy}{dx}.$$

Eliminirt man die Grösse $\frac{dy}{dx}$ aus dieser Gleichung und der Gleichung (XVII), so hat man

$$\left[\left(\frac{dX}{dx}\right)\left(\frac{dY}{dy}\right) - \left(\frac{dX}{dy}\right)\left(\frac{dY}{dx}\right)\right].R^2 -$$
$$\left[\left(\frac{dX}{dx}\right) + \left(\frac{dY}{dy}\right)\right].R + 1 = 0 \ldots.(XIX).$$

Sind ρ und ρ' die zwey Wurzeln dieser Gleichung, so hat man folgende Ausdrücke:

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} = \left(\frac{dX}{dx}\right) + \left(\frac{dY}{dy}\right)$$
$$\frac{1}{\rho\rho'} = \left(\frac{dX}{dx}\right)\left(\frac{dY}{dy}\right) - \left(\frac{dX}{dy}\right)\left(\frac{dY}{dx}\right)$$

Substituirt man aber in der Gleichung (XIX) für $\left(\frac{dX}{dx}\right)$, $\left(\frac{dX}{dy}\right)$ die in II gefundenen Werthe,

und behält die Bezeichnung der Grössen g, h, k aus dem §. 5 bey, so hat man

$$R = \frac{k}{2g}.[-h \pm \sqrt{h^2 - 4k^2 g}], \text{ wie zuvor.}$$

12. §. Wenn man zwey nächste Puncte einer Fläche betrachtet, so nennt man die Durchschnittslinie der zwey die Fläche in diesen Puncten tangirenden Ebenen mit der verlängerten geradlinigten Tangente, welche durch jene beyden Puncte der Fläche geht, *die reciproken Tangenten* der Fläche.

Die Gleichung der Fläche ist überhaupt

$$dz = p\,dx + q\,dy.$$

Setzt man voraus, dass die Ebene der xy die Fläche im Anfange der Coordinaten berührt, so ist

$$dz = o, \text{ oder } p\,dx + q\,dy = o.$$

Zieht man aber durch diesen Punct der Fläche eine gerade Linie, deren Gleichung $y = \alpha x$ ist, so hat man

$\frac{dy}{dx} = \alpha$, und $p + q\alpha = o$.

Geht man von diesem ersten Puncte der Fläche zu einem zweyten Puncte derselben so über, dass die berührenden Ebenen in beyden Puncten sich in der Linie $y = \alpha x$ schneiden, so hat man für diese zweyte Ebene

$$(p + dp) + \alpha(q + dq) = o, \text{ oder}$$
$$dp + \alpha dq = o,$$

d. h. wenn man für dp, dq ihre Werthe setzt,

$$r + s.\frac{dy}{dx} + \alpha(s + t.\frac{dy}{dx}) = o \ldots\ldots (XX).$$

Diese Gleichung enthält die Grösse $\frac{dy}{dx}$, welche die Richtung bestimmt, in welcher man von dem ersten Puncte der Fläche zu dem zweyten nachfolgenden Punct derselben gegangen ist. Heisst man diese Grösse α', so ist die Gerade

$$y = \alpha' x$$

die reciproke Tangente von der, deren Gleichung

$$y = \alpha x$$

ist. Die Reciprocität besteht darin, dass die Grössen α und α', welche diese Tangenten bestimmen, durch eine reciproke Gleichung (XX) unter einander verbunden sind, in welcher man nähmlich α mit α' verwechseln kann. Diese Gleichung ist

$$r + s\alpha' + \alpha(s + t\alpha') = 0, \text{ oder}$$

$$\frac{r}{t} + \frac{s}{t}(\alpha + \alpha') + \alpha\alpha' = 0.$$

Sind daher die reciproken Tangenten auf einander senkrecht, so ist $\alpha\alpha' - 1 = 0$, und die letzte Gleichung

$$\alpha^2 + \alpha\left(\frac{r - t}{s}\right) - 1 = 0;$$

und da diese Gleichung mit der Gleichung (VI) identisch ist, so folgt, dass die reciproken Tangenten eines Punctes der Fläche, wenn sie auf einander senkrecht sind, den beyden normalen Schnitten der grössten und kleinsten Krümmung der Fläche in diesem Puncte angehören.

Dasselbe findet man aus §. 11 Nr. IV. Ist nähmlich die Gleichung der die Fläche in einem Puncte tangirenden Ebene

$$z' - z = p(x' - x) + q(y' - y),$$

so ist die Gleichung des Durchschnittes derselben mit einer andern nächstfolgenden berührenden Ebene in der Richtung der $\frac{\delta y}{\delta x}$

$$(x' - x)\,\delta p + (y' - y)\,\delta q = 0.$$

Macht man also $x' = x + dx$ und $y' = y + dy$, wo die mit d bezeichneten Differentialien auf der Durchschnittslinie beyder Ebenen genommen werden, so ist $dx\,\delta p + dy\,\delta q = 0$, wie am angeführten Orte.

Setzt man endlich für δp, δq ihre Werthe, so ist

$$dx\,(r\,\delta x + s\,\delta y) + dy\,(s\,\delta x + t\,\delta y) = 0, \text{ oder}$$

$$r + s(y' + y'') + t y' y'' = 0, \text{ wie zuvor.}$$

Fünftes Capitel.

Flächen der zweyten Ordnung.

1. §. Nachdem wir in den vorhergehenden Capiteln die allgemeinen Eigenschaften der Flächen untersucht haben, gehen wir nun zu der näheren Betrachtung einiger besonderer Gattungen dieser Flächen über, und wählen unter diesen zuerst die *Flächen der zweyten Ordnung*, oder die Flächen, deren Gleichungen für die veränderlichen Grössen x y z des zweyten Grades sind.

Um aber bey diesen sowohl, als allen andern Flächen das, was von der *Grösse* und *Gestalt* dieser Flächen gilt, von dem abzusondern, was bloss von der *Lage* der Flächen gegen die drey coordinirten Ebenen abhängt, so wollen wir einige Betrachtungen über die Veränderungen vorausschicken, welche man in Beziehung auf die Lage der Coordinaten im Raume vornehmen kann.

Die einfachste Änderung, welche man den Coordinaten eines Punctes geben kann, besteht in einer blossen Verwechselung des Anfangspunctes, wobey die Lage der Achsen der Coordinaten ungeändert bleibt. Sind x y z die ursprünglichen Coordinaten, und A B C die ihnen in derselben Ordnung parallelen Coordinaten des neuen Anfangspunctes, und x′ y′ z′ die neuen Coordinaten, so hat man

$$x' = x - A$$
$$y' = y - B$$
$$z' = z - C.$$

2. §. Ohne die Lage der Coordinaten x, y, z eines Punctes zu ändern, kann man sie doch auf verschiedene Weise ausdrücken. Nennt man z. B. r die Entfernung des Punctes von dem Anfangspuncte der Coordinaten, und α β γ die Winkel, welche r resp. mit den Achsen der x y z bildet, so hat man

$$x = r \operatorname{Cos} \alpha$$
$$y = r \operatorname{Cos} \beta$$
$$z = r \operatorname{Cos} \gamma,$$

und überdiess, weil die Coordinaten x y z rechtwinklicht sind,

$$\operatorname{Cos}^2 \alpha + \operatorname{Cos}^2 \beta + \operatorname{Cos}^2 \gamma = 1.$$

Oder nennt man δ den Winkel der Entfernung r mit der Projection dieser Entfernung in der Ebene der x y, und ε den Winkel dieser Projection mit der Achse der x, so hat man, wenn ρ diese Projection ist,

$$\rho = r \operatorname{Cos} \delta$$
$$x = \rho \operatorname{Cos} \varepsilon \text{ also auch } x = r \operatorname{Cos} \delta \operatorname{Cos} \varepsilon$$
$$y = \rho \operatorname{Sin} \varepsilon \qquad y = r \operatorname{Cos} \delta \operatorname{Sin} \varepsilon$$
$$z = \rho \operatorname{tg.} \delta \qquad z = r \operatorname{Sin} \delta.$$

Oder endlich, nennt man, wie zuvor, α den Winkel der Entfernung r mit der Achse der x, und ζ den Winkel der Ebene x y mit der Ebene, in welcher x und r liegt, d. h. ζ den Winkel, welcher die Entfernung ς des Punctes von dem Endpuncte der Abscisse x mit der Achse der y bildet, so ist

$$\varsigma = r \operatorname{Sin} \alpha$$

also auch $x = r \operatorname{Cos} \alpha$ oder $x = r \operatorname{Cos} \alpha$

$$y = \rho \operatorname{Cos} \zeta \qquad y = r \operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Cos} \zeta$$
$$z = \rho \operatorname{Sin} \zeta \qquad z = r \operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Sin} \zeta.$$

3. §. Man kann aber auch die durch x y z gegebene Lage eines Punctes durch ganz *andere* Coordinaten x' y' z' ausdrücken, deren Lage gegen die ursprünglichen gegeben ist.

Nennt man α, β, γ die Winkel, welche eine gerade Linie a mit drey rechtwinklichten Coordinaten

x, y, z bildet, so sind, nach dem Vorhergehenden, die Projectionen dieser Geraden a

auf der Achse der x gleich $p = a \operatorname{Cos} \alpha$

$$y \quad p' = a \operatorname{Cos} \beta$$

$$z \quad p'' = a \operatorname{Cos} \gamma.$$

Die Summe der Quadrate dieser drey Gleichungen gibt

$$p^2 + p'^2 + p''^2 = a^2 (\operatorname{Cos}^2 \alpha + \operatorname{Cos}^2 \beta + \operatorname{Cos}^2 \gamma),$$

und da die Coordinaten x, y, z rechtwinklicht sind, so ist

$$\operatorname{Cos}^2 \alpha + \operatorname{Cos}^2 \beta + \operatorname{Cos}^2 \gamma = 1 \text{ oder}$$

$$p^2 + p'^2 + p''^2 = a^2,$$

oder das Quadrat einer geraden Linie ist gleich der Summe der Quadrate ihrer Projectionen auf drey senkrechte Achsen (Cap. II.).

Multiplicirt man endlich jene drey Gleichungen resp. durch $\operatorname{Cos} \alpha$, $\operatorname{Cos} \beta$, $\operatorname{Cos} \gamma$, so gibt die Summe dieser Producte

$$a = p \operatorname{Cos} \alpha + p' \operatorname{Cos} \beta + p'' \operatorname{Cos} \gamma,$$

oder, wenn man die drey Projectionen p, p', p'' der Geraden a wieder auf diese Gerade zurückprojicirt, so ist die Summe dieser Projectionen von jenen drey Projectionen gleich der ursprünglichen Geraden a (Cap. II).

4. §. Diess vorausgesetzt, seyen x y z die rechtwinklichten Coordinaten eines Punctes. Man denke sich durch den Anfangspunct dieser Coordinaten drey ihrer Lage nach gegebene Geraden, welche die Achsen der neuen Coordinaten x′ y′ z′ desselben Punctes seyn sollen.

Da die Lage der drey neuen Achsen gegeben ist, so sollen die Winkel, welche diese drey neuen Achsen mit den ursprünglichen Achsen der x y z bilden, bekannt seyn. Der Kürze wegen wollen wir durch (x′x), (x′y), (x′z) den Winkel bezeichnen, welchen die Achse der x′ mit jener der x, y, z bildet, und so für die übrigen.

Die gerade Linie, welche den Anfangspunct der Coordinaten mit dem gegebenen Puncte verbindet, kann als die gemeinschaftliche vierte Seite von zwey Vier-

ecken angesehen werden, deren Seiten übrigens nicht in einer einzigen Ebene liegen. Die drey übrigen Seiten sind in dem einen Vierecke die alten rechtwinklichten Coordinaten x, y, z und in dem andern die neuen Coordinaten x′ y′ z′, welche letztere unter sich willkührliche Winkel bilden sollen. Da beyde Vierecke eine gemeinschaftliche Seite haben, so sind (Cap. I. §. 13) die Projectionen beyder Vierecke auf irgend eine Gerade dieselben. Aber die Projection des ersten Viereckes ist offenbar gleich der Abscisse x, und die Projection der Seiten des andern Viereckes sind

$$x' \operatorname{Cos}(x x'),\ y' \operatorname{Cos}(x y'),\ z' \operatorname{Cos}(x z'),$$

und da die Summe der Projectionen aller Seiten beyder Vierecke, ausser der gemeinschaftlichen Seite, in beyden Vierecken einander gleich ist, so hat man

$$\left.\begin{array}{l} x = x' \operatorname{Cos}(x x') + y' \operatorname{Cos}(x y') + z' \operatorname{Cos}(x z') \\ \text{und eben so für die Projectionen der Vierecke} \\ \text{auf die Achsen der y und z} \\ y = x' \operatorname{Cos}(y x') + y' \operatorname{Cos}(y y') + z' \operatorname{Cos}(y z') \\ z = x' \operatorname{Cos}(z x') + y' \operatorname{Cos}(z y') + z' \operatorname{Cos}(z z'). \end{array}\right\} \text{I.}$$

Projicirt man auf dieselbe Art beyde Vierecke auf die neuen Achsen der x′, y′ und z′, so erhält man

$$\left.\begin{array}{l} x' = x \operatorname{Cos}(x x') + y \operatorname{Cos}(y x') + z \operatorname{Cos}(z x') \\ y' = x \operatorname{Cos}(x y') + y \operatorname{Cos}(y y') + z \operatorname{Cos}(z y') \\ z' = x \operatorname{Cos}(x z') + y \operatorname{Cos}(y z') + z \operatorname{Cos}(z z'), \end{array}\right\} \text{II.}$$

und durch die Gleichungen I. II. wird man von beyden Systemen der Coordinaten x y z und x′ y′ z′ die einen in die andern verwandeln können, wenn die Cosinus der neuen Winkel (x x′), (x y′) . . gegeben sind. Allein diese neun Constanten, welche nothwendig sind, die Lage der schiefen Achsen zu bestimmen, lassen sich auf sechs reduciren, weil zwischen den Grössen Cos (x x′), Cos (x y′) drey Bedingungsgleichungen Statt haben. Da nähmlich die drey ersten Coordinaten x y z unter einander senkrecht sind, so hat man zwi-

schen den Winkeln der x' mit x, y, z folgende Gleichung (Cap. I. §. 17).

$$\left.\begin{array}{l}\text{Cos}^2(xx') + \text{Cos}^2(yx') + \text{Cos}^2(zx') = 1\\ \text{und eben so für } y' \text{ und } z'\\ \text{Cos}^2(xy') + \text{Cos}^2(yy') + \text{Cos}^2(zy') = 1\\ \text{Cos}^2(xz') + \text{Cos}^2(yz') + \text{Cos}^2(zz') = 1\end{array}\right\}\text{III.}$$

5. §. Sollen nicht nur die alten Coordinaten x y z sondern auch die neuen x' y' z' unter einander rechtwinklicht seyn, so wird man haben

$$\left.\begin{array}{r}\text{Cos}(xx')\,\text{Cos}(xy') + \text{Cos}(yx')\,\text{Cos}(yy')\\ + \text{Cos}(zx')\,\text{Cos}(zy') = 0\\ \text{Cos}(xy')\,\text{Cos}(xz') + \text{Cos}(yy')\,\text{Cos}(yz')\\ + \text{Cos}(zy')\,\text{Cos}(zz') = 0\\ \text{Cos}(xx')\,\text{Cos}(xz') + \text{Cos}(yx')\,\text{Cos}(yz')\\ + \text{Cos}(zx')\,\text{Cos}(zz') = 0\end{array}\right\}\text{IV.}$$

Denn die erste der Gleichungen (IV) drückt (nach Cap. II. §. 3) aus, dass die Geraden x' und y' auf einander senkrecht stehen, und ähnliche Sätze drücken die beyden andern Gleichungen aus.

Geht man daher von den rechtwinklichten Coordinaten x y z wieder zu den rechtwinklichten Coordinaten x' y' z' über, oder umgekehrt, so hat man die Gleichungen I. und II. und die in diesen Gleichungen enthaltenen neun Constanten Cos (x x') Cos (x y') ... werden durch die sechs Bedingungsgleichungen (III. und IV.) auf drey Constanten reducirt.

Man kann diese sechs Bedingungsgleichungen auch noch auf folgende Art ausdrücken

$$\left.\begin{array}{l}\text{Cos}^2(xx') + \text{Cos}^2(xy') + \text{Cos}^2(xz') = 1\\ \text{Cos}^2(yx') + \text{Cos}^2(yy') + \text{Cos}^2(yz') = 1\\ \text{Cos}^2(zx') + \text{Cos}^2(zy') + \text{Cos}^2(zz') = 1\end{array}\right\}\text{V.}$$

und

$$\left.\begin{array}{l}\text{Cos}\,(xx')\ \text{Cos}\,(yx') + \text{Cos}\,(xy')\ \text{Cos}\,(yy') \\ \qquad + \text{Cos}\,(xz')\ \text{Cos}\,(yz') = 0 \\ \text{Cos}\,(xx')\ \text{Cos}\,(zx') + \text{Cos}\,(xy')\ \text{Cos}\,(zy') \\ \qquad + \text{Cos}\,(xz')\ \text{Cos}\,(zz') = 0 \\ \text{Cos}\,(yx')\ \text{Cos}\,(zx') + \text{Cos}\,(yy')\ \text{Cos}\,(zy') \\ \qquad + \text{Cos}\,(yz')\ \text{Cos}\,(zz') = 0 \end{array}\right\}\ \text{VI.}$$

und man sieht ohne Mühe, dass die beyden Systeme (V), (VI) eine Folge der zwey ersten (III), (IV) sind, und umgekehrt. In der That hat man, wenn die Coordinaten $x\ y\ z$ sowohl, als die $x'\ y'\ z'$ senkrecht sind,

$$x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2.$$

Substituirt man in dieser Gleichung die Werthe von x, y, z aus (I) und setzt die Factoren von x'^2, y'^2, z'^2, $x'y'$, $x'z'$ und $y'z'$ jeden für sich gleich Null, so erhält man die sechs Gleichungen (III) und (IV). Substituirt man aber in jener Gleichung die Werthe von x', y', z' aus (II), so erhält man eben so die sechs Gleichungen (V) und (VI).

Da also von jenen neun Grössen Cos (xx'), Cos(xy').. nur drey nothwendig sind, wenn die Coordinaten $x\ y\ z$ sowohl, als die neuen $x'\ y'\ z'$ rechtwinklicht sind, so wird man auch, wenn drey dieser Grössen gegeben sind, die andern sechs durch diese drey bestimmen können. Nimmt man z. B. Cos (xx') Cos (yy') und Cos (zz') als die drey gegebenen Grössen an, und setzt

$$1 + \text{Cos}\,(xx') + \text{Cos}\,(yy') + \text{Cos}\,(zz') = M$$
$$1 + \text{Cos}\,(xx') + \text{Cos}\,(yy') - \text{Cos}\,(zz') = N$$
$$1 - \text{Cos}\,(xx') + \text{Cos}\,(yy') - \text{Cos}\,(zz') = P$$
$$1 - \text{Cos}\,(xx') - \text{Cos}\,(yy') + \text{Cos}\,(zz') = Q,$$

so findet man

$$2\ \text{Cos}\,(yx') = \sqrt{NP} + \sqrt{MQ}$$
$$2\ \text{Cos}\,(xy') = \sqrt{NP} - \sqrt{MQ}$$
$$2\ \text{Cos}\,(xz') = \sqrt{QN} + \sqrt{MP}$$
$$2\ \text{Cos}\,(zx') = \sqrt{QN} - \sqrt{MP}$$

$$2 \operatorname{Cos}(z y') = \sqrt{PQ} + \sqrt{MN}$$
$$2 \operatorname{Cos}(y z') = \sqrt{PQ} - \sqrt{MN}.$$

6. §. Bequemer für den Gebrauch werden die Gleichungen (I) und (II), wenn man statt der neuen Grössen Cos (x x'), Cos (x y') und ihrer sechs Bedingungsgleichungen (III), (IV) oder (V), (VI) drey andere, unter einander unabhängige Winkel einführt. Zu diesem Zwecke seyen, wie zuvor, x y z die rechtwinklichten Coordinaten des gegebenen Punctes. Durch den Anfangspunct ziehe man in der Ebene der x y eine Gerade, welche mit der Achse der x den Winkel ψ bildet. Sieht man diese Gerade als die neue Achse der Abscissen an, und nennt X Y Z die Coordinaten des gegebenen Punctes in Beziehung auf die alte Ebene der x y und auf diese neue Achse, so hat man, wie man leicht sieht,

$$x = X \operatorname{Cos}\psi + Y \operatorname{Sin}\psi$$
$$y = Y \operatorname{Cos}\psi - X \operatorname{Sin}\psi$$
$$z = Z,$$

und umgekehrt

$$X = x \operatorname{Cos}\psi - y \operatorname{Sin}\psi$$
$$Y = x \operatorname{Sin}\psi + y \operatorname{Cos}\psi$$
$$Z = z.$$

Legt man nun durch die neue Achse der X eine Ebene, welche mit der Ebene der x y den Winkel ϑ bildet, und nennt X' Y' Z' die Coordinaten des gegebenen Punctes in Beziehung auf diese Ebene und auf die vorige Achse der X, so ist

$$X = X' \quad \text{und umgekehrt} \quad X' = X$$
$$Y = Y' \operatorname{Cos}\vartheta + Z' \operatorname{Sin}\vartheta \qquad Y' = Y \operatorname{Cos}\vartheta - Z \operatorname{Sin}\vartheta$$
$$Z = Z' \operatorname{Cos}\vartheta - Y' \operatorname{Sin}\vartheta \qquad Z' = Y \operatorname{Sin}\vartheta + Z \operatorname{Cos}\vartheta$$

Zieht man endlich in der neuen Ebene der X' Y' durch den Anfangspunct eine Gerade, welche mit der Durchschnittslinie der Ebenen x y und X' Y', d. h. welche mit der Achse der X oder X' den Winkel φ bildet,

und sieht man diese Gerade als die neue Achse der Abscissen an, und nennt man x' y' z' die rechtwinklichten Coordinaten des gegebenen Punctes in Beziehung auf die Ebene X' Y' und auf diese neue Achse, so hat man

$$X' = x' \operatorname{Cos} \varphi - y' \operatorname{Sin} \varphi$$
$$Y' = y' \operatorname{Cos} \varphi + x' \operatorname{Sin} \varphi$$
$$Z' = z',$$

und umgekehrt

$$x' = Y' \operatorname{Sin} \varphi + X' \operatorname{Cos} \varphi$$
$$y' = Y' \operatorname{Cos} \varphi - X' \operatorname{Sin} \varphi$$
$$z' = Z'.$$

Substituirt man die gefundenen Werthe von $X Y Z$ und $X' Y' Z'$ in den drey ersten dieser Gleichungen, so erhält man

$$\left.\begin{aligned}
x = {} & x'(\operatorname{Cos} \vartheta \operatorname{Sin} \psi \operatorname{Sin} \varphi + \operatorname{Cos} \psi \operatorname{Cos} \varphi) \\
& + y'(\operatorname{Cos} \vartheta \operatorname{Sin} \psi \operatorname{Cos} \varphi - \operatorname{Cos} \psi \operatorname{Sin} \varphi) \\
& + z'.\operatorname{Sin} \vartheta \operatorname{Sin} \psi \\
y = {} & x'(\operatorname{Cos} \vartheta \operatorname{Cos} \psi \operatorname{Sin} \varphi - \operatorname{Sin} \psi \operatorname{Cos} \varphi) \\
& + y'(\operatorname{Cos} \vartheta \operatorname{Cos} \psi \operatorname{Cos} \varphi + \operatorname{Sin} \psi \operatorname{Sin} \varphi) \\
& + z'.\operatorname{Sin} \vartheta \operatorname{Cos} \psi \\
z = {} & -x' \operatorname{Sin} \vartheta \operatorname{Sin} \varphi - y' \operatorname{Sin} \vartheta \operatorname{Cos} \varphi + z' \operatorname{Cos} \vartheta
\end{aligned}\right\} \text{(VII)}$$

und eben so, wenn man die gefundenen Werthe von $X Y Z$ und $X' Y' Z'$ in den drey letzten jener Gleichungen substituirt

$$\left.\begin{aligned}
x' = {} & x(\operatorname{Cos} \vartheta \operatorname{Sin} \psi \operatorname{Sin} \varphi + \operatorname{Cos} \psi \operatorname{Cos} \varphi) \\
& + y(\operatorname{Cos} \vartheta \operatorname{Cos} \psi \operatorname{Sin} \varphi - \operatorname{Sin} \psi \operatorname{Cos} \varphi) \\
& - z.\operatorname{Sin} \vartheta \operatorname{Sin} \varphi \\
y' = {} & x(\operatorname{Cos} \vartheta \operatorname{Sin} \psi \operatorname{Cos} \varphi - \operatorname{Cos} \psi \operatorname{Sin} \varphi) \\
& + y(\operatorname{Cos} \vartheta \operatorname{Cos} \psi \operatorname{Cos} \varphi + \operatorname{Sin} \psi \operatorname{Sin} \varphi) \\
& - z.\operatorname{Sin} \vartheta \operatorname{Cos} \varphi. \\
z' = {} & x \operatorname{Sin} \vartheta \operatorname{Sin} \psi + y \operatorname{Sin} \vartheta \operatorname{Cos} \psi + z \operatorname{Cos} \vartheta
\end{aligned}\right\} \text{(VIII)}$$

und diess sind die gesuchten Ausdrücke, durch welche man von den rechtwinklichten Coordinaten $x y z$ eines Punctes zu andern wieder rechtwinklichten Coordina-

ten $x' y' z'$, oder umgekehrt, übergeht. Aus ihnen folgt zugleich

$$\text{Cos}\,(x x') = \text{Cos}\,\vartheta\ \text{Sin}\,\psi\ \text{Sin}\,\varphi + \text{Cos}\,\psi\ \text{Cos}\,\varphi$$
$$\text{Cos}\,(x y') = \text{Cos}\,\vartheta\ \text{Sin}\,\psi\ \text{Cos}\,\varphi - \text{Cos}\,\psi\ \text{Sin}\,\varphi$$
$$\text{Cos}\,(x z') = \text{Sin}\,\vartheta\ \text{Sin}\,\psi \text{ u. s. w.}$$

7. §. Die verschiedenen Relationen, welche wir in den vorhergehenden Capiteln für Linien und Ebenen, in rechtwinklichten Coordinaten gegeben haben, lassen sich, nur weniger einfach, auch durch schiefwinklichte Coordinaten ausdrücken. Sind $x\,y\,z$ diese schiefwinklichten Coordinaten eines Punctes, dessen Entfernung vom Anfangspuncte gleich r ist, und bezeichnet man, wie zuvor, durch $(x y)$, $(x.r)$, $(x y.r)$.... die Winkel, welche x mit y, x mit r, und r mit der Ebene der $x y$ bildet u. f., so ist r die Diagonale eines schiefwinklichten Parallelepipedums, dessen Seiten x, y, z sind. Heisst ω die Diagonale der Seite $x y$ dieses Parallelepipedums, so ist

$$r^2 = \omega^2 + z^2 + 2\,\omega z.\text{Cos}\,(\omega z),$$

und $\omega^2 = x^2 + y^2 + 2\,x y\ \text{Cos}\,(x y)$, also auch

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2\,x y\ \text{Cos}\,(x y) + 2\,\omega z\ \text{Cos}\,(\omega z) \quad ..(\text{IX})$$

Diese Diagonale ω theilt die Seitenfläche $x y$ des Parallelepipedums in zwey gleiche Dreyecke, und die Seitenlinien dieser Dreyecke sind ω, x und y, also auch die Projectionen von diesen Seitenlinien auf die Achse der z

von ω $\omega\ \text{Cos}\,(\omega z)$
x $x\ \text{Cos}\,(x z)$
y $y\ \text{Cos}\,(y z)$,

also ist auch, weil die Projection der Seite ω gleich der Summe der Projectionen der beyden andern Seiten x und y ist (§. 3)

$$\omega\ \text{Cos}\,(\omega z) = x\ \text{Cos}\,(x z) + y\,\text{Cos}\,(y z), \text{ oder}$$
$$2\,\omega z\ \text{Cos}\,(\omega z) = 2\,x z\ \text{Cos}\,(x z) + 2\,y z\ \text{Cos}\,(y z)$$

und daher die Gleichung (IX)

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2\,x y\ \text{Cos}\,(x y) + 2\,x z\ \text{Cos}\,(x z) + 2\,y z\ \text{Cos}\,(y z) \quad(\text{X}).$$

I. Weiter sind die Projectionen von x, y und z auf die Diagonale r nach der Ordnung x Cos (r x), y Cos (r y) und z Cos (r z), also ist auch

$$r = x \operatorname{Cos}(r x) + y \operatorname{Cos}(r y) + z \operatorname{Cos}(r z) \ldots\ldots (XI)$$

Betrachtet man ferner das Viereck, dessen Seiten x y z und r nicht in einer Ebene liegen, so ist die Projection der Seite r auf x gleich r Cos (r x), die Projectionen von x, y und z aber auf x sind, in derselben Ordnung x, y Cos (x y) und z Cos (x z), also ist wieder (nach §. 3)

$$\left.\begin{array}{l} r \operatorname{Cos}(r x) = x + y \operatorname{Cos}(x y) + z \operatorname{Cos}(x z) \\ \text{und eben so} \\ r \operatorname{Cos}(r y) = y + z \operatorname{Cos}(y z) + x \operatorname{Cos}(x y) \\ r \operatorname{Cos}(r z) = z + x \operatorname{Cos}(x z) + y \operatorname{Cos}(y z) \end{array}\right\} (XII)$$

Auch ist, wie man leicht sieht,

$$\frac{x}{r} = \frac{\operatorname{Sin}(r . y z)}{\operatorname{Sin}(x . y z)}, \quad \frac{y}{r} = \frac{\operatorname{Sin}(r . x z)}{\operatorname{Sin}(y . x z)}, \quad \frac{z}{r} = \frac{\operatorname{Sin}(r . x y)}{\operatorname{Sin}(z . x y)}.$$

II. Wir wollen nun durch den Anfangspunct der Coordinaten zwey Gerade r und r′ ziehen. Die schiefwinklichten Coordinaten des Endpunctes von r seyen, wie zuvor, x y z, und die den vorigen parallelen Coordinaten des Endpunctes von r′ seyen x′ y′ z′. Diess vorausgesetzt ist das Quadrat der Entfernung dieser zwey Endpuncte (Gleichung X)

$$\begin{aligned} r^2 + r'^2 - 2 r r' \operatorname{Cos}(r . r') = {} & (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2 \\ & + 2 (x' - x)(y' - y) \operatorname{Cos}(x . y) \\ & + 2 (x' - x)(z' - z) \operatorname{Cos}(x . z) \\ & + 2 (y' - y)(z' - z) \operatorname{Cos}(y . z) \end{aligned}$$

oder, wenn man die Grössen $(x' - x)^2$, $(y' - y)^2 \ldots$ auflöst, und die Werthe von r^2 und r'^2 aus der Gleichung (X) substituirt,

$$\left.\begin{aligned} r r' . \operatorname{Cos}(r . r') = {} & x x' + y y' + z z' + (x y' + x' y) \operatorname{Cos}(x . y) \\ & + (x z' + x' z) \operatorname{Cos}(x . z) \\ & + (y z' + y' z) \operatorname{Cos}(y . z) \end{aligned}\right\}$$

oder endlich, wenn man die letzte Gleichung mit den Gleichungen XII combinirt

$$\left.\begin{aligned}\text{Cos}\,(r.r') &= \frac{x}{r}\,\text{Cos}\,(r'.x) + \frac{y}{r}\,\text{Cos}\,(r'.y) + \frac{z}{r}\,\text{Cos}\,(r'.z)\\ &= \frac{x'}{r'}\,\text{Cos}(r.x) + \frac{y'}{r'}\,\text{Cos}(r.y) + \frac{z'}{r'}\,\text{Cos}(r.z)\end{aligned}\right\}\text{(XIII)}$$

für den Ausdruck des Cosinus des Winkels der beyden Geraden r und r′. Setzt man $\text{Cos}\,(r.r') = 0$, so gibt der letzte Ausdruck die Bedingungsgleichung, die Statt haben muss, wenn die beyden Geraden r und r′ auf einander senkrecht stehen. Man könnte diese Untersuchungen leicht weiter fortführen, wenn sie für die Anwendung nützlicher wären. Setzt man in den vorhergehenden Ausdrücken die Coordinaten rechtwinklicht, also $(x.y) = (x.z) = (y.z) = 90^\circ$, so erhält man die in dem II. Capitel entwickelten Gleichungen. So gibt die Gleichung (X)

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Die Gleichungen (XII) aber geben

$$x = r\,\text{Cos}\,(r.x)$$
$$y = r\,\text{Cos}\,(r.y)$$
$$z = r\,\text{Cos}\,(r.z)$$

also auch die Gleichung (XI)

$1 = \text{Cos}^2(r.x) + \text{Cos}^2(r.y) + \text{Cos}^2(r.z)$, (Cap. I §. 17)
und endlich die Gleichung (XIII)

$$\text{Cos}\,(r.r') = \frac{xx' + yy' + zz'}{rr'}, \text{ oder}$$

$$\text{Cos}\,(r.r') = \frac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}$$

oder endlich

$\text{Cos}\,(r.r') = \text{Cos}\,(r.x)\,\text{Cos}\,(r'.x) + \text{Cos}\,(r.y)\,\text{Cos}\,(r'.y) + \text{Cos}\,(r.z)\,\text{Cos}\,(r'.z)$, wie Cap. I. §. 17.

8. §. Die Gleichungen (VII), (VIII) des §. 6, oder die Gleichungen (I), (II) des §. 4, die letzten mit ihren sechs Bedingungsgleichungen (III) und (IV), oder auch (V) und (VI) des §. 5 verbunden, gehören also für den Übergang von einem Systeme rechtwinklichter Coordinaten zu einem andern Systeme von wieder recht-

winklichten Coordinaten, und sie enthalten, wie wir gesehen haben, drey willkührliche, unter einander unabhängige Grössen. Dadurch wird aber bloss die *Lage* der Achsen geändert. Will man also, um die Verwandlung vollständig zu machen, auch den *Anfangspunct* der Coordinaten ändern, so wird man (§. 1) noch drey andere willkührliche Grössen einführen. Daraus folgt, dass die Gleichung einer Fläche in ihrer grössten Allgemeinheit betrachtet, nicht mehr als sechs Constanten enthalten könne, die sich *bloss auf die Lage* der Fläche gegen die Achsen der Coordinaten beziehen, und da die Gleichungen (VII) und (VIII) des §. 6 in Beziehung auf x y z und auf x′ y′ z′ nur der ersten Ordnung sind, so wird durch diese Änderung der Coordinaten der *Grad* der Gleichung der Fläche nicht geändert.

Die vorhergehenden Betrachtungen werden uns öfter nützlich seyn. Wir wollen sie sogleich auf die Flächen der zweyten Ordnung anwenden.

9. §. Die allgemeine Gleichung der Flächen der zweyten Ordnung zwischen drey rechtwinklichten Coordinaten x y z ist bekanntlich

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxz + Eyz + Fxy + Gx + Hy + Kz + 1 = 0 \ldots (I).$$

Man kann dieser Gleichung durch eine zweckmässige Änderung der Lage der drey coordinirten Ebenen eine viel einfachere Gestalt geben, ohne ihrer Allgemeinheit Eintrag zu thun.

Legt man durch die Achse der x eine neue Ebene, welche gegen die Ebene der x y unter dem Winkel ϑ geneigt ist, und nimmt man an, dass die Achse der x′ in dieser neuen Ebene mit der Achse der x den Winkel ψ bildet, nimmt man ferner die Achse der y′ in derselben Ebene senkrecht auf die Achse der x′ und endlich die Achse der z′ senkrecht auf die Ebene der x′ y′, so hat man (§. 6)

$$x = x' \operatorname{Cos} \psi + y' \operatorname{Cos} \vartheta \operatorname{Sin} \psi + z' \operatorname{Sin} \vartheta \operatorname{Sin} \psi$$

$y = - x' \operatorname{Sin} \psi + y' \operatorname{Cos} \vartheta \operatorname{Cos} \psi + z' \operatorname{Sin} \vartheta \operatorname{Cos} \psi$

$z = - y' \operatorname{Sin} \vartheta + z' \operatorname{Cos} \vartheta$.

Substituirt man diese Werthe von x y z in der gegebenen Gleichung, so erhält man eine Gleichung des zweyten Grades für x' y' z', in welcher wir die Coefficienten von $x' z'$ und von $y' z'$ gleich Null setzen können.

Diese Coefficienten sind

$$2 \operatorname{Sin} \vartheta \operatorname{Cos} \vartheta (A \operatorname{Sin}^2 \psi + B \operatorname{Cos}^2 \psi + F \operatorname{Sin} \psi \operatorname{Cos} \psi - C) - (\operatorname{Sin}^2 \vartheta - \operatorname{Cos}^2 \vartheta)(D \operatorname{Sin} \psi + E \operatorname{Cos} \psi) = 0 \ldots (1)$$

$$2 (A - B) \operatorname{Sin} \vartheta \operatorname{Sin} \psi \operatorname{Cos} \psi + \operatorname{Cos} \vartheta (D \operatorname{Cos} \psi - E \operatorname{Sin} \psi) - F \operatorname{Sin} \vartheta (\operatorname{Sin}^2 \psi - \operatorname{Cos}^2 \psi) = 0 \ldots (2).$$

Eliminirt man aus den beyden letzten Gleichungen die Grösse tg. ϑ, und dividirt die resultirende Gleichung durch $\operatorname{Cos}^3 \psi$, und setzt der Kürze wegen, tg. $\psi = u$ oder $\operatorname{Cos}^2 \psi = \frac{1}{1+u^2}$, und

$$P = 2(Eu - D)[Au^2 + B + Fu - C(1 + u^2)] + (E + Du)[2u(A - B) - Fu^2 + F],$$

so erhält man

$$(Eu - D)^2 (E + Du) - \left(\frac{2u(A-B) - Fu^2 + F}{1+u^2}\right) . P = 0 \ldots (3)$$

Da aber P den Factor $(1 + u^2)$ enthält, da man nähmlich auch hat

$$P = (1 + u^2) . [2(Eu - D)(A - C) - (E + Du) F + 2D(A - B) + 2EF]$$

so ist die Gleichung (3) für u = tg. ψ des dritten Grades, also gibt sie immer wenigstens einen reellen Werth von ψ. Ist so ψ bestimmt, so gibt die Gleichung (2) die für tg. ϑ nur des ersten Grades ist, auch einen reellen Werth von ϑ. Man kann daher, wie gesagt, die Grössen ψ und ϑ immer so annehmen, dass die Coefficienten von $x' z'$ und $y' z'$ verschwinden, d. h. man kann die gegebene Gleichung (I) ihrer Allgemeinheit unbeschadet, immer auf die Form brigen

$$A x'^2 + B y'^2 + C z'^2 + D x' y' + E x' + F y' + G z' + 1 = 0 \ldots (I'),$$

wo A, B, C ... andere Bedeutungen, als zuvor, haben, und $x' y' z'$ die neuen rechtwinklichten Coordinaten der Fläche sind.

In dieser letzten Gleichung (I') kann man auch noch den Factor von $x' y'$ gleich Null setzen, wenn man nur die Lage der zwey Achsen der x' und y' in der neuen Ebene gehörig verändert. Denn nennt man x'' und y'' diese neuen Achsen, und φ den Winkel der x' mit x'', so hat man

$$x' = x'' \operatorname{Sin} \varphi - y'' \operatorname{Cos} \varphi$$
$$y' = x'' \operatorname{Cos} \varphi + y'' \operatorname{Sin} \varphi.$$

Substituirt man diese Werthe von x' und y' in der Gleichung (I'), und setzt man den Factor von $x'' y''$ gleich Null, so hat man

$$2 \operatorname{Sin} \varphi \operatorname{Cos} \varphi (B - A) + D (\operatorname{Sin}^2 \varphi - \operatorname{Cos}^2 \varphi) = 0 \text{ oder}$$
$$(B - A) \operatorname{Sin} 2\varphi + D \operatorname{Cos} 2\varphi = 0,$$

und diese Gleichung gibt einen reellen Werth von φ.

Aus dem Vorhergehenden folgt, dass die allgemeine Gleichung der Flächen der zweyten Ordnung die Form hat

$$A x^2 + B y^2 + C z^2 + D x + E y + F z + G = 0 \ldots (I'').$$

In dieser Gleichung hängt es noch von uns ab, den Anfang der Coordinaten, ohne ihre Lage, zu ändern, wodurch man vielleicht noch einige Glieder derselben verschwinden machen kann. Setzt man nähmlich in der Gleichung (I'') statt $x\ y\ z$ die Werthe $x + a$, $y + b$, $z + c$, so erhält man

$$A x^2 + B y^2 + C z^2 + x (2 A a + D) + y (2 B b + E)$$
$$+ z (2 C c + F) + A a^2 + B b^2 + C c^2 + D a + E b$$
$$+ F c + G = 0.$$

Wollte man daher auch die Glieder, deren Factor x, y und z ist, verschwinden machen, so würde man für $a\ b\ c$ folgende Werthe annehmen,

$$a = \frac{-D}{2A},\ b = \frac{-E}{2B},\ c = \frac{-F}{2C},$$

und man sieht, dass diese letzte Reduction eigentlich

nur dann angeht, wenn keine der drey Grössen A, B, C, d. h. wenn keine der Factoren von x^2, y^2 z^2 in der Gleichung (I″) gleich Null ist. Ist aber eine, oder sind zwey dieser Grössen A B C gleich Null, so wird man wenigstens eine der Grössen a b c so annehmen können, dass der constante Theil G der Gleichung (I″) verschwindet. Verschwinden aber alle drey Grössen A B C, so gehört die gegebene Gleichung bekanntlich für eine Ebene.

I. Diese Betrachtung theilt die Flächen der zweyten Ordnung in zwey wesentlich verschiedene Classen.

Ist nähmlich erstens keine der drey Grössen A B C gleich Null, so kann, nach dem Vorhergehenden, die allgemeine Gleichung der Flächen der zweyten Ordnung auf die Form gebracht werden

$$Mz^2 + M'y^2 + M''x^2 + L = o \ldots (A),$$

und da diese Gleichung in Beziehung auf x y z symmetrisch ist, und für jede dieser drey Coordinaten immer zwey gleiche, nur durch ihre Zeichen verschiedene Werthe gibt, so sind die drey coordinirten Ebenen der x y, x z, y z zugleich *diametrale Ebenen*, oder solche, welche das System aller auf diese Ebenen senkrechten Chorden der Fläche in zwey gleiche Theile theilen. Da ferner diese Gleichung nicht geändert wird, wenn man auch alle Coordinaten x y z negativ nimmt, so wird jede Chorde der Fläche, welche durch den Anfangspunct der Coordinaten geht, von diesem Anfangspuncte in zwey gleiche Theile getheilt, oder jede solche Chorde wird ein *Durchmesser* der Fläche, und der Anfangspunct der Coordinaten wird der *Mittelpunct* der Fläche seyn, die Worte Durchmesser und Mittelpunct in der Bedeutung genommen, in welcher man sie bey ebenen Curven zu nehmen pflegt. Die Flächen dieser ersten Classe haben also einen Mittelpunct.

Verschwindet aber zweytens eine der drey Grössen A B C z. B. die erste, so hat die Gleichung (I″) die Form

$$ay^2 + bz^2 + cx + dy + ez + f = o$$

und man wird, wenn man $x + \alpha$, $y + \beta$, $z + \gamma$ für x y z setzt, in dem letzten Ausdrucke die Factoren von y und z und den constanten Theil der Gleichung wegbringen, also diese Gleichung auf die Form reduciren

$$Mz^2 + M'y^2 + Nx = o \; . \; . \; . \; (B).$$

Verschwinden endlich zwey der drey Grössen ABC, z. B. die zwey ersten, so hat die Gleichung (I″) die Form

$$az^2 + bx + cy + dz + e = o$$

und man wird durch eine ähnliche Versetzung des Anfangs der Coordinaten den Factor von z und den constanten Theil der letzten Gleichung wegbringen, also die Gleichung auf die Form reduciren

$$Mz^2 + Ny + N'x = o \; . \; . \; . \; . \; (B')$$

und man sieht, dass alle Flächen der zweyten Classe, die in den Gleichungen B und B′ enthalten sind, keinen Mittelpunct haben. Wir wollen nun beyde Classen näher untersuchen.

10. §. Die Flächen der ersten Classe sind in der Gleichung (A)

$$Mz^2 + M'y^2 + M''x^2 + L = o$$

enthalten. Man kann in ihr immer den ersten Factor M positiv annehmen, und dann sind folgende Fälle zu unterscheiden:

I. Wenn alle übrigen Factoren M′ M″ L auch positiv sind.

II. Wenn bloss die constante Grösse L negativ ist.

III. Wenn der Factor M′ und M″ negativ,

IV. Wenn der Factor M′ und M″ und die constante Grösse L negativ ist.

Der erste Fall ist in der Gleichung

$$Mz^2 + M'y^2 + M''x^2 + L = o$$

enthalten, wo alle Factoren positiv sind. Da er für die Coordinaten nur unmögliche Werthe gibt, den Fall

$L = o$ ausgenommen, wo diese Gleichung den drey folgenden gleichgeltend ist

$$x = o, y = o, z = o,$$

welche für den Anfang der Coordinaten gehören: so ist diese Gleichung ohne Bedeutung, und wir gehen daher zu dem zweyten Falle über.

Sind M M′ M″ und L positive Grössen, so gehört zu diesem zweyten Falle die Gleichung

$$M z^2 + M' y^2 + M'' x^2 = L.$$

Setzt man $\frac{L}{M''} = a^2, \frac{L}{M'} = b^2, \frac{L}{M} = c^2$, so wird diese Gleichung.

$$\frac{z^2}{c^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1 \text{ oder}$$

$$a^2 b^2 z^2 + a^2 c^2 y^2 + b^2 c^2 x^2 = a^2 b^2 c^2.$$

Man sieht zuerst, dass diese Fläche nach allen Seiten begränzt ist. Setzt man nach der Ordnung $x = \alpha$, $y = \beta$, $z = \gamma$, so erhält man

$$\frac{z^2}{c^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{\alpha^2}{a^2}$$

$$\frac{z^2}{c^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1 - \frac{\beta^2}{b^2}$$

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1 - \frac{\gamma^2}{c^2}$$

für die Schnitte der Fläche mit Ebenen, die den coordinirten Ebenen der y z, x z und x y parallel sind. Diese Schnitte sind also alle Ellipsen. Für $\alpha = \beta = \gamma = o$ erhält man die *Hauptschnitte* der Fläche mit den coordinirten Ebenen selbst.

Die Gleichung einer Ebene, die durch die Achse der z geht, und mit der Ebene der x z den Winkel ω macht, ist

$$y = x \operatorname{tg} \omega$$

also die Projection des Schnittes unserer Fläche mit dieser Ebene in der coordinirten Ebene der x z

$$\frac{z^2}{c^2} + x^2 \left(\frac{tg.^2 \omega}{b^2} + \frac{1}{a^2} \right) = 1$$

eine Ellipse. Um daraus die Gleichung des Schnittes in der schneidenden Ebene $y = x \, tg \, \omega$ selbst abzuleiten, wird man $x = x' \, Cos \, \omega$ setzen, wodurch man erhält

$$\frac{z^2}{c^2} + x'^2 \left(\frac{Sin^2 \omega}{b^2} + \frac{Cos^2 \omega}{a^2} \right) = 1$$

wieder eine Ellipse. Dasselbe wird man für schneidende Ebenen finden, welche durch die Achse der y und der x gehen.

Da alle diese Schnitte Ellipsen sind, so nennt man diese Fläche *Ellipsoid.* Für den besondern Fall $a = b$ erhält man die Fläche, welche durch Rotation einer Ellipse um die Achse der z entsteht, und für $a = b = c$ erhält man die bekannte Fläche der Kugel.

Wenn eine der drey Achsen $2a$, $2b$, $2c$ des Ellipsoids z. B. die erste, wächst, so dehnt sich das Ellipsoid in der Richtung dieser Achse immer mehr aus. Wird endlich $\frac{1}{a}$ gleich Null, so wird die Gleichung des Ellipsoids

$$\frac{z^2}{c^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

welche Gleichung für einen Cylinder gehört, dessen Achse die Achse der x, und dessen Basis die Ellipse der letzten Gleichung ist.

Wäre überdiess noch $\frac{1}{b}$ gleich Null, so wird die Gleichung des Ellipsoids

$$z^2 = c^2 \text{ oder } (z + c)(z - c) = 0$$

welche Gleichung für das System von zwey mit der Ebene der x y parallelen geraden Linien gehört.

11. §. Der dritte Fall wird durch folgende Gleichung ausgedrückt

$$M z^2 - M' y^2 - M'' x^2 + L = 0$$

wo die constanten Grössen $M \, M' \, M''$ und L alle positiv

vorausgesetzt werden. Behält man die vorigen Bezeichnungen von a b c bey, so hat man

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} + 1 = 0.$$

Setzt man wieder nach der Ordnung $x = \alpha$, $y = \beta$, $z = \gamma$, so findet man, dass die mit der Ebene der y z und x z parallelen Schnitte Hyperbeln sind, deren kleine Achsen in der Achse der z liegen, und dass die mit der Ebene der x y parallelen Schnitte Ellipsen sind, deren halbe Achsen

$$a.\sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{c^2}} \text{ und } b.\sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{c^2}},$$

also desto grösser sind, je grösser der Abstand γ der schneidenden Ebene vom Anfange der Coordinaten ist. Die Fläche ist also um den Anfangspunct, oder rings um die Achse der z hohl, und diese Höhlung wächst mit dem Abstande von dem Anfangspuncte. Diese Fläche heisst daher *Hyperboloid* und zwar *mit einem Fache*, weil sie die Achse der z rings um und ohne Unterbrechung frey umgibt.

I. Man wird sich von ihrer Gestalt nach dem Vorhergehenden leicht auch ohne Zeichnung einen deutlichen Begriff machen. Um ihn noch mehr zu versinnlichen, wollen wir für einen besondern Fall $a = b$ setzen, wodurch die Gleichung der Fläche wird

$$a^2 z^2 - c^2 (y^2 + x^2) + a^2 c^2 = 0$$

und man sieht, dass hier alle mit x y parallelen Schnitte Kreise sind, deren Halbmesser $a.\sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{c^2}}$ ist, und dass ferner alle Schnitte, deren Ebenen durch die Achse der z gehen, unter einander gleich sind, dass also die Fläche durch die Rotation einer Hyperbel um ihre kleine Achse d. h. um die Achse der z entsteht.

II. Wäre $L = 0$, so hätte man

$$M z^2 - M' y^2 - M'' x^2 = 0$$

die Gleichung eines Kegels, dessen Scheitel im Anfangs-

puncte, dessen Achse in der Achse der z, und dessen Basis eine mit x y parallele Ellipse ist, deren Gleichungen sind

$$z = \frac{1}{\sqrt{M}}$$

$$M' y^2 + M'' x^2 = 1.$$

In der That geben die Hauptschnitte der mit x z und y z parallelen Ebenen

$$M z^2 - M'' x^2 = o$$

$$M z^2 - M' y^2 = o$$

von welchen Gleichungen jede zu einem Systeme von zwey geraden Linien gehört, die durch den Anfang der Coordinaten gehen. Für $M' = M''$ ist jene Ellipse, oder die Basis des Kegels, ein Kreis.

Es stellt also dieses Hyperboloid einen doppelten, an seinen spitzen Enden zusammengefügten Trichter dar, der über und unter der Ebene der x y hyperbolisch ausläuft.

Der eben betrachtete Kegel aber, dessen Gleichung

$$M z^2 - M' y^2 - M'' x^2 = o$$

ist, stellt die Asymptote jenes Hyperboloids dar, da sich beyde Flächen immer mehr nähern, ohne sich je zu treffen.

12. §. Der vierte und letzte Fall der ersten Classe hat die Gleichung

$$M z^2 - M' y^2 - M'' x^2 - L = o.$$

Die mit x y parallelen Schnitte sind für $z = \gamma$

$$M' y^2 + M'' x^2 = M \gamma^2 - L$$

also imaginär, so lange γ kleiner ist, als $\pm\sqrt{\frac{L}{M}}$. Ist aber γ grösser als $\pm\sqrt{\frac{L}{M}}$, so sind diese Schnitte Ellipsen. Die Fläche besteht also aus zwey von einander abgesonderten Theilen, deren einer über, und der andere unter der Ebene der x y ist, und da die mit x z und y z parallelen Schnitte Hyperbeln sind, so heisst die Fläche *Hyperboloid mit zwey Fächern.* Man erkennt ihre Gestalt am leichtesten, wenn man $M' = M''$ setzt, wo alle mit x y

parallelen Schnitte, so bald sie nicht imaginär sind, Kreise bilden, und die Fläche entsteht dann durch die Rotation einer Hyperbel, deren grosse Achse in der Achse der z ist, um diese grosse Achse.

I. Für $L = o$ fallen die beyden Scheitel dieses Hyperboloids zusammen, und vereinigen sich in dem Anfangspuncte der Coordinaten, für welchen Fall alle mit xy parallelen Schnitte möglich werden, und die *Hauptschnitte* der Ebenen xz und yz in gerade Linien übergehen, die durch den Anfang der Coordinaten gehen. Die Fläche wird also für diesen Fall die eines Kegels, dessen Scheitel im Anfange, dessen Achse in der Achse der z, und dessen Basis eine Ellipse in einer der xy parallelen Ebene ist. Dieser Kegel ist die Asymtote jenes Hyperboloids. Denn heisst man z die Ordinate dieses Kegels, und z' die entsprechende Ordinate des Hyperboloids, so ist

$$z^2 = \frac{M' y^2 + M'' x^2}{M} \text{ und}$$

$$z'^2 = \frac{M' y^2 + M'' x^2 - L}{M}$$

$$\text{also } z - z' = \frac{L}{M (z + z')}$$

oder die Differenz $(z - z')$ desto kleiner, je grösser die Ordinate z oder z' wird, oder beyde Flächen nähern sich immer mehr, ohne sich je zu erreichen.

II. Ist $L = o$ und $M' = M''$, so wird die Fläche

$$M z^2 = M' (x^2 + y^2)$$

ein senkrechter Kegel mit kreisförmiger Basis.

$L = o$ und $M'' = o$ gibt

$$M z^2 - M' y^2 = o$$

das System von zwey parallelen auf yz senkrechten Ebenen.

Ist allein $M'' = o$ so hat man

$$M z^2 = M' y^2 + L$$

für einen Cylinder, dessen Achse senkrecht auf $y\,z$, und dessen Basis eine Hyperbel in der Ebene $y\,z$ ist.

13. §. Wir wollen nun zu den Flächen der zweyten Classe übergehen.

Wenn nur einer der Factoren von x^2, y^2, z^2 verschwindet, so kann, nach dem Vorhergehenden, die Gleichung der Flächen der zweyten Ordnung auf folgende Form gebracht werden.

$$M\,z^2 + M'\,y^2 + N\,x = o.$$

Wenn man, wie oben, den Factor M von z^2 positiv annimmt, so gibt diese Gleichung nur zwey verschiedene Fälle, nähmlich auch M' positiv, und M' negativ. Denn das Zeichen von N hat keinen Einfluss auf die Gestalt, sondern nur auf die Lage der Fläche gegen die drey coordinirten Achsen.

Erster Fall. M und M' positiv. Sind p und p' positive Grössen, so hat die vorhergehende Gleichung für diesen Fall die Gestalt

$$p\,z^2 + p'\,y^2 - 4\,p\,p'\,x = o$$

Die drey Hauptschnitte dieser Fläche mit den Ebenen

der $x\,y$ sind $y^2 = 4\,p\,x$

$x\,z$ $\quad z^2 = 4\,p'\,x$

$y\,z$ $\quad z = y\sqrt{-\frac{p'}{p}}.$

Die zwey ersten gehören für Parabeln, deren Äste sich alle nach *derselben* Seite verbreiten. Die letzte gehört für den Anfangspunct der Coordinaten. Die Fläche liegt also ganz auf *einer* Seite der Ebene $y\,z$ und geht durch den Anfang der Coordinaten. Jeder mit der Ebene $y\,z$ parallele Schnitt gibt eine Ellipse. Die Fläche heisst *elliptisches Paraboloid.*

Sind die Parameter p, p' gleich, so entsteht die Fläche durch die Rotation der Parabel $y^2 = 4\,p\,x$ um die Achse der x.

Wenn die Parabel $z^2 = 4\,p'\,x$ sich parallel mit sich selbst so bewegt, dass ihr Scheitel die Parabel $y^2 = 4\,p\,x$

beschreibt, so erzeugt die erste Parabel das elliptische Paraboloid, denn die Gleichung

$$p\,z^2 + p'\,y^2 - 4\,p\,p'\,x = o$$

ist das Resultat der Elimination der Grösse α zwischen den zwey Gleichungen

$$z^2 = 4\,p'\,x - \frac{p'}{p} \cdot \alpha^2$$
$$y = \alpha.$$

Zweyter Fall. M positiv und M′ negativ. Sind wieder p und p′ positive Grössen, so hat die Gleichung die Form

$$p\,z^2 - p'\,y^2 + 4\,p\,p'\,x = o$$

Die drey Hauptschnitte der Fläche mit den Ebenen der x y sind $y^2 = + 4\,p\,x$

x z $\quad z^2 = - 4\,p'\,x$

y z $\quad z = \pm\, y \sqrt{\frac{p'}{p}}$

Die zwey ersten sind Parabeln, deren Äste sich aber nach entgegengesetzten Seiten verbreiten; die letzte gehört für das System von zwey geraden Linien, deren Winkel von den Achsen der y und der z halbirt wird.

Wenn die Parabel $z^2 = - 4\,p'\,x$ sich parallel mit sich selbst so bewegt, dass ihr Scheitel die Parabel $y^2 = 4\,p\,x$ beschreibt, so erzeugt die erste Parabel unsere Fläche, denn die Gleichung

$$p\,z^2 - p'\,y^2 + 4\,p\,p'\,x = o$$

ist das Resultat der Elimination von α zwischen den zwey Gleichungen

$$z^2 = \frac{p'}{p}\,\alpha^2 - 4\,p'\,x \quad \text{und}$$
$$y = \alpha.$$

Alle mit x y und x z parallelen Schnitte sind Parabeln, die aber nach entgegengesetzten Richtungen ihre Äste verbreiten. Die mit y z parallelen Schnitte sind Hyperbeln, deren Mittelpuncte in der Achse der x und zwischen den Asymptoten $z = \pm\, y \sqrt{\frac{p'}{p}}$ liegen. Die

Ebenen durch diese zwey geradlinichten Asymptoten senkrecht auf die coordinirte Ebene der y z sind die asymptotischen Ebenen unserer Fläche. Die Fläche selbst heisst *hyperbolisches Paraboloid.*

Man weiss, dass die allgemeine Gleichung der Curven der zweyten Ordnung

$$ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = o$$

für eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel gehört, wenn $b^2 - 4ac$ negativ, Null oder positiv ist.

Daraus folgt, dass das hyperbolische Paraboloid durch keine Ebene in einer Ellipse geschnitten werden kann. Denn, welches auch die Lage dieser Ebene seyn mag, wenn man aus der Gleichung dieser Ebene den Werth von x sucht, und ihn in der Gleichung

$$pz^2 - p'y^2 + 4pp'x = o$$

substituirt, so wird die resultirende Gleichung in y z das Glied, dessen Factor das Product y z ist, nicht enthalten, also wird das vierfache Product des Factors von z^2 in den Factor von y^2 immer entweder negativ oder Null seyn, also der Schnitt der Ebene mit der Fläche nie eine Ellipse seyn können. Eben so wird man zeigen, dass das elliptische Paraboloid von keiner Ebene in einer Hyperbel geschnitten werden kann.

14. §. Noch ist der Fall übrig, wo zwey der Factoren von x^2, y^2, z^2 verschwinden, wo also die Gleichung (§. 1.) die Form erhält

$$Mz^2 + Ny + N'x = o.$$

Die Hauptschnitte dieser Fläche sind

$$Mz^2 + Ny = o$$
$$Mz^2 + N'x = o$$
$$Ny + N'x = o$$

und die damit parallelen Schnitte sind

$$Mz^2 + Ny + N'\alpha = o$$
$$Mz^2 + N'x + N\beta = o$$
$$Ny + N'x + M\gamma^2 = o$$

Die zwey ersten sind Parabeln, die alle den ihnen entsprechenden Parabeln in den Hauptschnitten gleich und parallel sind, und deren Scheitel in der Ebene der x y, und zwar in der geraden Linie

$$N y + N' x = o$$

liegen. Die mit x y parallelen Schnitte sind parallele gerade Linien. Die Fläche ist daher ein *parabolischer Cylinder*, dessen gerade Seitenlinien alle mit der Ebene x y parallel sind, und mit der Achse der x einen Winkel bilden, dessen trigonometrische Tangente gleich $\frac{N'}{N}$ ist.

Alle Flächen der zweyten Ordnung also, welche einen Mittelpunct haben, sind in der Gleichung enthalten

$$M z^2 + M' y^2 + M'' x^2 + L = o.$$

Sind alle vier Coefficienten M M' M'' L positiv, so gehört die Gleichung für den Anfangspunct der Coordinaten. Ist bloss der constante Theil L negativ, so gehört sie für das Ellipsoid, das sich in einen Cylinder verwandelt, wenn einer der drey andern Coefficienten verschwindet.

Sind zwey der Factoren der veränderlichen Grössen z^2 y^2 x^2 negativ, und L positiv, so gehört die Gleichung für das einfächrige Hyperboloid. Für L = o gibt sie den Kegel.

Sind zwey der Factoren der veränderlichen Grössen negativ, und der constante Theil L auch negativ, so gehört die Gleichung für das zweyfächrige Hyperboloid. Verschwindet einer der drey Factoren, so gibt die Gleichung einen Cylinder. Endlich gibt L = o wieder einen Kegel.

Die Flächen ohne Mittelpunct sind in folgenden Gleichungen enthalten, wo p p' positive Grössen sind

$p z^2 + p' y^2 - 4 p p' x = o$ für das elliptische Paraboloid
$p z^2 - p' y^2 + 4 p p' x = o$ für das hyperbol. Paraboloid
$z^2 + p y + p' x = o$ für den parabolischen Cylinder.

Das Ellipsoid hat sechs Scheitel und drey reelle Achsen; das einfächrige Hyperboloid hat vier Scheitel und zwey Achsen; das zweyfächrige zwey Scheitel und eine Achse. Das elliptische Paraboloid hat nur einen Scheitel, und das hyperbolische Paraboloid hat gar keinen, so wenig als der Kegel, da das, was man bey dem letzten gewöhnlich Scheitel nennt, eigentlich der Mittelpunct des Kegels ist.

15. §. Wir wollen nun im Allgemeinen untersuchen, ob eine gegebene Fläche der zweyten Ordnung in die erste oder zweyte Classe gehöre, d. h. ob sie einen Mittelpunct habe oder nicht.

Die allgemeine Gleichung dieser Flächen ist

$$a x'^2 + a' y'^2 + a'' z'^2 + 2(b y' z' + b' x' z' + b'' x' y') + 2(c x' + c' y' + c'' z') - d = 0.$$

Sind $\alpha\ \beta\ \gamma$ die Coordinaten des Mittelpunctes, und substituirt man in der letzten Gleichung für $x'\ y'\ z'$ die Werthe $x+\alpha$, $y+\beta$, $z+\gamma$, so erhält man

$$\begin{aligned} & a x^2 + a' y^2 + a'' z^2 + 2(b y z + b' x z + b'' x y) \\ & + 2x(a\alpha + b''\beta + b'\gamma + c) + 2y(b''\alpha + a'\beta + b\gamma + c') \\ & + 2z(b'\alpha + b\beta + a''\gamma + c'') + a\alpha^2 + a'\beta^2 + a''\gamma^2 \\ & + 2(b\beta\gamma + b'\alpha\gamma + b''\alpha\beta) + 2(c\alpha + c'\beta + c''\gamma) - d = 0. \end{aligned}$$

Man bemerkt von selbst, dass in diesen beyden Gleichungen die Coefficienten von zwey Dimensionen der Coordinaten einander gleich sind, und dass der constante Theil der zweyten Gleichung gleich der ganzen ersten Gleichung wird, wenn man in diesen $\alpha\ \beta\ \gamma$ in $x'\ y'\ z'$ verwandelt.

Damit die zweyte Gleichung nur die zweyten Dimensionen von $x\ y\ z$ enthalte, müssen die Coefficienten von x, y und z Null seyn, d. h. man muss haben

$$\left.\begin{aligned} a\,\alpha + b''\beta + b'\gamma + c &= 0 \\ b''\alpha + a'\beta + b\,\gamma + c' &= 0 \\ b'\alpha + b\,\beta + a''\gamma + c'' &= 0 \end{aligned}\right\} \text{(I)}$$

und da dann die zweyte Gleichung nicht geändert wird, wenn man auch die Zeichen aller drey Coordi-

naten x y z in die entgegengesetzten verwandelt, so sind die drey Gleichungen (I) die Bedingungsgleichungen, die Statt haben müssen, wenn die Fläche einen Mittelpunct haben soll, und die Coordinaten dieses Mittelpunctes werden α β γ seyn.

Sucht man aber aus den Gleichungen (I) die Werthe von α β γ, so erhält man, wenn man, der Kürze wegen,

$$M = a b^2 + a' b'^2 + a'' b''^2 - a a' a'' - 2 b b' b'' \text{ setzt},$$

$$\left.\begin{aligned} M\alpha &= c(a'a'' - b^2) + c'(b b' - a'' b'') + c''(b b'' - a' b') \\ M\beta &= c(b b' - a'' b'') + c'(a a'' - b'^2) + c''(b' b'' - a b) \\ M\gamma &= c(b b'' - a' b') + c'(b' b'' - a b) + c''(a a' - b''^2) \end{aligned}\right\} \text{(II)}.$$

Sind die Theile dieser drey Gleichungen rechts von den Gleichheitszeichen endliche Grössen, und ist

$$M = 0,$$

so sind die Coordinaten α β γ unendlich gross, oder die Fläche hat keinen Mittelpunct.

Wird aber einer dieser Werthe von α, β, γ gleich $\frac{0}{0}$, so hat die Fläche zu Mittelpuncten alle Puncte einer Ebene, und werden zwey dieser Werthe gleich $\frac{0}{0}$, so hat die Fläche zu Mittelpuncten alle Puncte einer geraden Linie.

16. §. Die allgemeine Gleichung der Flächen der zweyten Ordnung, die einen Mittelpunct haben, ist

$$a x^2 + a' y^2 + a'' z^2 + 2(b y z + b' x z + b'' x y) = 1,$$

wo der Mittelpunct der Fläche der Anfang der Coordinaten ist. Man suche den Werth R einer ihrer drey rechtwinklichten Halbachsen.

Die Gleichung einer Kugel, deren Halbmesser R und deren Mittelpunct im Anfange der Coordinaten ist, wird seyn

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

Diese zwey Oberflächen werden sich in zweyen von den Scheiteln der gegebenen Fläche berühren, wenn

für diese Scheitel die Werthe von x y z und von den Differentialcoefficienten $p = \left(\frac{dz}{dx}\right)$, $q = \left(\frac{dz}{dy}\right)$ dieselben Werthe haben.

Differentiirt man aber die gegebene Gleichung zuerst in Beziehung auf z und x, und dann in Beziehung auf z und y, so hat man

$$a\,x + b''y + b'z + p(b'x + by + a''z) = o$$
$$b''x + a'\,y + b\,z + q(b'x + by + a''z) = o.$$

Eben so gibt die Gleichung der Kugel

$$x + pz = o$$
$$y + qz = o$$

Eliminirt man aus den letzten vier Gleichungen die Grössen p, q, so erhält man

$$z(ax + b''y + b'z) - x(b'x + by + a''z) = o$$
$$z(b''x + a'y + bz) - y(b'x + by + a''z) = o.$$

Eliminirt man aus diesen beyden, und aus den zwey ersten der vorhergehenden Gleichungen die drey Coordinaten x y z, so erhält man eine Gleichung, welche den gesuchten Werth von R gibt. Diese Gleichung ist

$$R^6 . [a a' a'' + 2 b b' b'' - a b^2 - a' b'^2 - a'' b''^2]$$
$$- R^4 . [a a' + a a'' + a' a'' - b^2 - b'^2 - b''^2]$$
$$+ R^2 . [a + a' + a''] - 1 = o,$$

und sie gibt die Werthe der sechs gesuchten Halbachsen, von denen immer je zwey gleich und von entgegengesetzten Zeichen sind, so dass die letzte Gleichung als eine des dritten Grades zu betrachten ist.

17. §. Das Vorhergehende wird uns in den Stand setzen, zu untersuchen, zu welcher der bisher betrachteten Flächen eine gegebene Fläche der zweyten Ordnung gehört.

Die gegebene Gleichung der Fläche wird nähmlich in der Form enthalten seyn

$$a x^2 + a' y^2 + a'' z^2 + 2(b y z + b' x z + b'' x y)$$
$$+ 2(c x + c' y + c'' z) - d = o,$$

wo man also die Coefficienten a a' . . . gegeben hat.

Man substituire die Werthe dieser Coefficienten in den drey Gleichungen I. (§. 15.)

$$\left.\begin{array}{l} a\alpha + b''\beta + b'\gamma + c = 0 \\ b''\alpha + a'\beta + b\gamma + c' = 0 \\ b'\alpha + b\beta + a''\gamma + c'' = 0 \end{array}\right\} (I)$$

und suche aus ihnen die Werthe von $\alpha\ \beta\ \gamma$.

Diese Werthe sind entweder endlich, oder unbestimmt, oder unendlich. Wir wollen diese drey Fälle nach der Reihe untersuchen.

I. Die Werthe von $\alpha\ \beta\ \gamma$ sind endlich.

Setzt man

$$\begin{aligned} -h = {} & a\alpha^2 + a'\beta^2 + a''\gamma^2 \\ & + 2(b\beta\gamma + b'\alpha\gamma + b''\alpha\beta) \\ & + 2(c\alpha + c'\beta + c''\gamma) - d, \end{aligned}$$

so hat man für die Gleichung der Fläche (§. 15.)

$$a x^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2(b y z + b'x z + b''x y = h.$$

Es seyen A B C die drey Halbachsen der Fläche, so ist bekanntlich die Gleichung der Fläche

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1 \text{ oder } Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = 1.$$

Bezeichnet man durch R^2 eines der drey Quadrate, A^2, B^2, C^2, und setzt

$$\frac{R^2}{h} = Q,$$

so erhält man die drey Werthe von Q, d. h. die Werthe von

$$\frac{A^2}{h},\ \frac{B^2}{h},\ \frac{C^2}{h}$$

durch die Gleichung (§. 16.)

$$\begin{aligned} & Q^3 . [a b^2 + a'b'^2 + a''b''^2 - a a'a'' - 2 b b'b''] \\ & + Q^2 . [a a' + a'a'' + a a'' - b^2 - b'^2 - b''^2] \\ & - Q . [a + a' + a''] + 1 = 0 \ldots (1). \end{aligned}$$

Nennt man $Q\ Q'\ Q''$ die drey Wurzeln dieser Gleichung, so ist

$$A^2 = hQ = \frac{1}{P},\ B^2 = hQ' = \frac{1}{P'},\ C^2 = hQ'' = \frac{1}{P''}.$$

Die Gleichung (1) wird, nach Descartes bekannter

Regel, so viele positive Wurzeln haben, als sie Abwechselungeu der Zeichen ihrer Glieder hat, und so viele negative, als sie Folgen gleicher Zeichen ihrer Glieder hat. Die Zeichen der Wurzeln der Gleichung (1) werden also auch die Zeichen der Werthe von P P′ P″ bestimmen. Diese drey Grössen werden entweder I. alle positiv seyn, dann gehört die erste gegebene Gleichung für das Ellipsoid, oder es werden II. nur zwey positiv und eine negativ seyn, für das einfächrige Hyperboloid, oder es werden endlich III. zwey negativ, und eine positiv seyn, für das zweyfächrige Hyperboloid. Sind alle drey negativ, so ist die Fläche imaginär.

Substituirt man in dem vorhergehenden Werthe von h die gefundenen Werthe von α β γ, und findet man h = o, so gehört die allgemeine Gleichung

$$ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2(byz + b'xz + b''xy) = o$$

für einen Kegel, dessen Scheitel im Anfange der Coordinaten ist.

II. Die Werthe von α β γ sind unbestimmt, oder von der Form $\frac{o}{o}$.

Dann liegen (§. 15) die Mittelpuncte alle in einer Ebene oder in einer geraden Linie, und die gegebene Gleichung gehört im ersten Falle für das System von zwey parallelen Ebenen, und in dem zweyten Fall für einen Cylinder.

III. Die Werthe von α β γ sind unendlich.

In diesem Falle schneide man die Fläche mit einer Ebene. Wenn für jede Lage dieser Ebene der Schnitt nie eine Hyperbel werden kann, so gehört die gegebene Gleichung für das elliptische Paraboloid, und wenn er nie eine Ellipse werden kann, für das hyperbolische Paraboloid. Ist endlich der Schnitt weder eine Ellipse, noch eine Hyperbel, sondern nur eine Parabel oder eine gerade Linie, so gehört die gegebene Gleichung für den parabolischen Cylinder.

Ex. Sey die Gleichung gegeben

$$4z^2 + 36x^2 + 9y^2 + 24z + 36y + 72x + 72 = 0.$$

Also ist $a = 36 \quad c = 36 \quad$ und $b = b' = b'' = 0$

$a' = 9 \quad c' = 18$

$a'' = 4 \quad c'' = 12$

$d = -72,$

und daher die Gleichungen I.

$$\alpha + 1 = 0 \text{ oder } \alpha = -1$$
$$\beta + 2 = 0 \qquad \beta = -2$$
$$\gamma + 3 = 0 \qquad \gamma = -3,$$

und da $\alpha\ \beta\ \gamma$ endlich sind, so gehört die gegebene Fläche in die erste Classe.

Die Gleichung (1) gibt

$$(36)^2 \cdot Q^3 - (36)(14) \cdot Q^2 + 49 \cdot Q - 1 = 0,$$

und die drey Wurzeln dieser Gleichung sind

$$Q = \frac{1}{36},\ Q' = \frac{4}{36},\ Q'' = \frac{9}{36}.$$

Weiter ist $h = 36$, also

$$A^2 = hQ = 1,\ B^2 = hQ' = 4,\ C^2 = hQ'' = 9$$

oder $P = 1, \qquad P' = \frac{1}{4}, \qquad P'' = \frac{1}{9}.$

also die gesuchte Fläche ein Ellipsoid, dessen halbe Achsen $A = 1$, $B = 2$, $C = 3$ und dessen Gleichung ist

$$x^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{3}\right)^2 = 1.$$

Sey eben so die Gleichung gegeben

$$mx = yz,$$

so geben die Gleichungen II. des §. 15

$$\alpha = -\infty,\ \beta = \frac{0}{0},\ \gamma = \frac{0}{0},$$

also hat wegen des unendlichen Werthes von α der dritte Fall Statt, und da der Schnitt der gegebenen Fläche mit irgend einer Ebene nie eine Ellipse werden kann, so gehört die gegebene Gleichung für ein hyperbolisches Paraboloid.

Ist die Gleichung gegeben

$$m x^2 + 2 n y z = o,$$

so geben die Gleichungen II. des §. 15

$$\alpha = \beta = \gamma = o,$$

also hat hier der erste Fall Statt. Diese Werthe von α, β, γ geben aber $h = o$, also ist (nach §. 17 Nr. I) die gegebene Gleichung für einen Kegel, dessen Scheitel im Anfange der Coordinaten liegt.

Sechstes Capitel.

Einhüllende Curven.

1. §. Um dieses und das folgende Capitel leichter zu verstehen, wollen wir einige Betrachtungen aus der Integralrechnung kurz voraus schicken.

Es sey $V = o$ irgend eine Gleichung zwischen x, y und $\frac{dy}{dx}$. Ihr Integral, welches wir durch $U = o$ bezeichnen wollen, wird also eine Gleichung zwischen x, y und einer willkührlichen Constante α seyn. Wenn man daher die Gleichung $U = o$ auf die gewöhnliche Weise in Beziehung auf x und y differentiirt, und aus den beyden letzten Gleichungen die Grösse α eliminirt, so wird man die Gleichung $V = o$ wieder erhalten, oder mit andern Worten: die Gleichung $V = o$ ist das Resultat der Elimination der Grösse α aus den zwey Gleichungen

$$U = o \text{ und } \left(\frac{dU}{dx}\right) dx + \left(\frac{dU}{dy}\right) dy = o \ldots (I).$$

Es ist aber klar, dass das Resultat dieser Elimination dasselbe seyn wird, welches auch der Werth von α ist, selbst wenn α veränderlich wäre, *wenn nur immer die zwey Gleichungen* (I) *Statt haben.*

Allein wenn α veränderlich ist, so ist von der Gleichung $U = o$ das vollständige Differential

$$\left(\frac{dU}{dx}\right) dx + \left(\frac{dU}{dy}\right) dy + \left(\frac{dU}{d\alpha}\right) d\alpha = o.$$

Also werden die Gleichungen I. für ein veränderliches α nur dann Statt haben, wenn

$$\left(\frac{dU}{d\alpha}\right) d\alpha = o$$

ist. Diese letzte Gleichung gibt aber entweder $d\alpha = o$, das heisst, α gleich einer constanten Grösse, welches der vorige Fall ist, oder $\left(\frac{dU}{d\alpha}\right) = o$, woraus α gleich einer Function von x und y folgt.

Eliminirt man also die Grösse α aus den beyden Gleichungen

$$U = o, \left(\frac{dU}{d\alpha}\right) = o,$$

so erhält man eine Gleichung zwischen x und y ohne einer willkührlichen Constante, welche offenbar auch derselben Differentialgleichung $V = o$ genug thun, welche aber doch von dem gewöhnlichen Integrale $U = o$ der Gleichung $V = o$ wesentlich verschieden seyn wird, weil in dieser letzten α eine Constante, in jener aber α eine Function von x und y ist.

Wir wollen jene, oder die Gleichung $U = o$ zwischen x und y und der Constante α, das *vollständige* Integral der Differentialgleichung $V = o$ und diese, oder das Resultat der Elimination von α aus den beyden Gleichungen $U = o$ und $\left(\frac{dU}{d\alpha}\right) = o$ das *particuläre* Integral der Differentialgleichung $V = o$ nennen.

Ex. Sey die Differentialgleichung

$$V = o = x + \frac{y\,dy}{dx} - \frac{dy}{dx}\sqrt{x^2 + y^2 - b^2}$$

gegeben. Da man diese Gleichung auch so ausdrücken kann

$$dy = d\,.\,\frac{(x^2 + y^2 - b^2)}{2\sqrt{x^2 + y^2 - b^2}}$$

so ist ihr vollständiges Integral

$$U = o = \sqrt{x^2 + y^2 - b^2} - y - \alpha \quad \text{oder}$$

$$x^2 - 2\alpha y - \alpha^2 - b^2 = o \ldots . (1)$$

wo α die willkührliche beständige Grösse ist.

Differentiirt man aber die letzte Gleichung in Beziehung auf α, so erhält man

$$\alpha = -y$$

und dieser Werth von α in der Gleichung (1) substituirt, gibt

$$x^2 + y^2 = b^2 \ldots\ldots (2)$$

welches daher das *particuläre* Intregal der gegebenen Gleichung $V = o$ ist, denn die Gleichung (2) gibt

$$x + \frac{y\,dy}{dx} = o \quad \text{und} \quad \sqrt{x^2 + y^2 - b^2} = o,$$

also thut die Gleichung (2) der Gleichung $V = o$ ebenfalls genug.

Dieselben Betrachtungen lassen sich auch auf Differentialgleichungen der höheren Ordnungen, und von mehr als zwey veränderlichen Grössen anwenden.

I. So gibt $V = o = d^2y^2 - \frac{2\,dx\,dy\,d^2y}{x} + dx^4$

das vollständige nächste Integral

$$U = o = (x^2 + \alpha^2)\,dx - 2\,\alpha\,dy,$$

wo α die willkührliche Constante ist.

Aber $\left(\frac{dU}{d\alpha}\right) = o = \alpha - \frac{dy}{dx}$ also, wenn man diesen Werth von $\alpha = \frac{dy}{dx}$ in $U = o$ substituirt,

$$x^2 - \frac{dy^2}{dx^2} = o \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{dx} = \pm x,$$

welches daher das partielle Integral der gegebenen Gleichung $V = o$ ist.

II. Sey ferner $V = o$ eine Differentialgleichung der ersten Ordnung zwischen drey veränderlichen Grössen x, y, z und ihren so genannten partiellen Differentialien $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ und $\left(\frac{dz}{dy}\right)$. Das vollständige Integral derselben zwischen x, y, z und zwey Constanten, α, β sey $U = o$.

Um $V = o$ zu finden, wenn $U = o$ gegeben ist, wird man aus den drey Gleichungen

$$U = o, \left(\frac{dU}{dx}\right) = o, \left(\frac{dU}{dy}\right) = o$$

die zwey Constanten α und β eliminiren, und das Resultat der Elimination wird die Gleichung $V = o$ seyn.

Wenn man aber die Grössen α und β veränderlich voraussetzt, so ist

$$dU = o = \left(\frac{dU}{dx}\right)dx + \left(\frac{dU}{dy}\right)dy + \left(\frac{dU}{dz}\right)dz$$
$$+ \left(\frac{dU}{d\alpha}\right)d\alpha + \left(\frac{dU}{d\beta}\right)d\beta$$

und es ist klar, dass man durch das vorhergehende Verfahren zu derselben Gleichung $V = o$ gelangt, wenn man annimmt

$$\left(\frac{dU}{dx}\right) = o, \left(\frac{dU}{dy}\right) = o \text{ und } \left(\frac{dU}{d\alpha}\right) + \left(\frac{dU}{d\beta}\right)\frac{d\beta}{d\alpha} = o \ldots (3)$$

Der letzten dieser Gleichungen (3) kann man erstens Genüge thun, wenn man setzt

$$\left(\frac{dU}{d\alpha}\right) = o, \text{ und } \left(\frac{dU}{d\beta}\right) = o.$$

Eliminirt man also aus den drey Gleichungen

$$U = o, \left(\frac{dU}{d\alpha}\right) = o, \left(\frac{dU}{d\beta}\right) = o$$

die zwey veränderlichen Grössen α und β, so findet man das *particuläre* Integral der Differentialgleichung $V = o$.

Man kann aber auch noch zweytens der letzten der Gleichungen (3) auf eine andere Art genug thun, die viel allgemeiner ist, als die vorhergehende.

Nimmt man nähmlich an, dass β irgend eine Function von α, oder dass $\beta = \varphi\,\alpha$ ist, so wird jene Gleichung, wenn man $\varphi'\,\alpha = \frac{d\,.\,\varphi\,\alpha}{d\alpha}$ setzt, in folgende übergehen

$$\left(\frac{dU}{d\alpha}\right) + \frac{dU}{d\,.\,\varphi\,\alpha}\,.\,\varphi'\,\alpha = o,$$

welche Gleichung man einfacher durch

$$\left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = o$$

vorstellen kann. Eliminirt man dann aus den zwey Gleichungen

$$U = o, \text{ und } \left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = o$$

die veränderliche Grösse α, so erhält man eine Glei-

chung W = o, welche die Grösse α nicht mehr, aber dafür die ganz willkührliche Function φ enthält, und da diese Gleichung W = o der gegebenen Differentialgleichung V = o noch auf eine viel allgemeinere Weise genug thut, als das auf ähnlichem Wege vorher gefundene particuläre Integral, so nennt man die Gleichung W = o *das allgemeine Integral* der Differentialgleichung V = o. Man sehe über diesen Gegenstand die Mémoires de Paris 1784, die Mémoires de Berlin 1774 und Lagrange's Leçons sur le Calcul des Fonctions pag. 178.

2. §. Sey U = o die Gleichung irgend einer ebenen Curve zwischen den veränderlichen Coordinaten x y und einer Constante α.

So lange die Grösse α einen bestimmten Werth hat, wird die Gleichung U = o ebenfalls eine bestimmte individuelle Curve bezeichnen. Wenn man aber diesem Parameter α nach und nach verschiedene Werthe gibt, so wird auch die Gleichung U = o nach und nach zwar unter einander ähnliche, aber ihrer Form und Lage nach verschiedene Curven ausdrücken.

Wenn man in der allgemeinen Gleichung U = o dieser Curven, nachdem man der Grösse α einen bestimmten Werth gegeben hat, ihr einen neuen von dem vorhergehenden unendlich wenig verschiedenen Werth gibt, so wird man die Gleichung der nächst folgenden jener Curven erhalten, welche durch ihre Form und Lage von der unmittelbar vorhergehenden ebenfalls nur unendlich wenig verschieden seyn, und sie im Allgemeinen in irgend einem oder in mehreren Puncten schneiden wird.

Diese Durchschnittspuncte der zweyten Curve mit der ersten werden diejenigen Puncte der ersten Curve seyn, für welche sich die Coordinaten x, y, z nicht ändern, wenn α sich ändert, und in $\alpha + d\alpha$ übergeht. Wenn man also die Gleichung U = o in Beziehung auf

α differentiirt, so wird die Gleichung $\left(\frac{dU}{d\alpha}\right) = o$ für jenen Durchschnittspunct gehören, und da dieser Durchschnittspunct zugleich auf der ersten Curve liegt, so werden die beyden Gleichungen dieser Durchschnittspuncte je zweyer nächsten Curven seyn

$$U = o$$

$$\left(\frac{dU}{d\alpha}\right) = o$$

Wenn man daher aus diesen beyden Gleichungen die Werthe von x und y, in α ausgedrückt, sucht, so werden diese Werthe für die Coordinaten des Durchschnittspunctes je zweyer nächsten Curven gehören, und man wird auf diese Art so viele dieser Durchschnittspuncte erhalten, als man der Grösse α verschiedene Werthe geben kann. Die Aufeinanderfolge dieser Durchschnittspuncte wird nach einem gewissen Gesetze fortgehen, wird also eine bestimmte Curve bilden, von der man die Gleichung in x und y erhalten wird, wenn man die beyden vorhergehenden Gleichungen von α unabhängig macht, d. h. *wenn man aus ihnen die Grösse α eliminirt.* Es ist klar, dass diese Curve der Durchschnittspuncte zugleich diejenige ist, welche in jedem ihrer Puncte eine gemeinschaftliche Tangente mit der gegebenen ihrer Lage und Form nach veränderlichen Curve hat, oder welche alle diese gegebenen Curven selbst tangirt und sie ringsum einschliesst, daher wir sie *einhüllende Curve* (Enveloppe) nennen wollen.

I. In der That führt diese Betrachtung der gemeinschaftlichen Tangente zu denselben beyden Gleichungen, welche wir so eben gefunden haben. Da nähmlich die einhüllende Curve mit der veränderlichen eingehüllten einen gemeinschaftlichen Punct haben muss, so werden sie beyde für diesen Punct auch dieselben Coordinaten x und y, und auch dieselbe Gleichung zwischen diesen Coordinaten haben, nur mit dem Unterschiede, dass die Grösse α, welche in der Gleichung $U = o$ der ein-

gehüllten Curve constant ist, in der Gleichung der einhüllenden veränderlich seyn wird. Da ferner die Lage der Tangente beyder Curven dieselbe ist, und diese Lage von dem Werthe $\frac{dy}{dx}$ abhängt, weil die Subtangente gleich $\frac{y\,dx}{dy}$ ist, so muss also der Werth von $\frac{dy}{dx}$, den man aus der Gleichung $U = o$ durch Differentiation ableitet, derselbe seyn, die Grösse α mag in dieser Gleichung als constant oder auch als eine veränderliche Grösse angesehen werden, was aber nur dann Statt haben kann, wenn der Theil des Differentials von U, der sich auf die Grösse α bezieht, gleich Null ist, das heisst, wenn man hat

$$\left(\frac{dU}{d\alpha}\right) = o$$

wie zuvor.

II. Die letzte Gleichung aber ist, nach §. 1. dieselbe, welche das *particuläre* Integral gibt, von der die Gleichung $U = o$ selbst das vollständige Integral ist. Daraus folgt, dass das particuläre Integral einer Gleichung $U = o$ zugleich die Gleichung der Curve ist, welche alle Curven *einhüllt*, deren Gleichung $U = o$ ist.

Beyspiele werden diess deutlicher machen.

3. §. Der Mittelpunct eines Kreises bewege sich auf der Achse der x so, dass das Quadrat seines veränderlichen Halbmessers immer gleich der Abscisse α des Mittelpunctes multiplicirt in eine Constante b ist. Man suche die Curve, welche alle diese beweglichen Kreise einhüllt, oder die Curve aller Durchschnittspuncte je zwey nächster dieser Kreise.

Die Gleichung des beweglichen Kreises in irgend einer seiner Lagen ist

$$y^2 + (x - \alpha)^2 = \alpha b$$

Differentiirt man diesen Ausdruck in Beziehung auf α, so erhält man

$$\alpha = \frac{b}{2} + x$$

und substituirt man diesen Werth von α in der ersten Gleichung, so ist

$$y^2 = b x + \frac{1}{4} b^4$$

für die einhüllende Curve, die also die Apollonische Parabel ist.

Note. Dieselbe Gleichung fand Leibnitz (Act. Eruditor. Lips. 1694) als Auflösung einer ganz andern Aufgabe. Er suchte nähmlich die Curve, deren Normalen sich wie die Quadratwurzeln aus der Summe der Abscisse und der Subnormale verhalten. Um diese Curve zu finden, betrachtet er sie als entstanden durch die auf einander folgenden Durchschnitte von Kreisen, deren Mittelpuncte alle auf der Achse der x liegen. Die Halbmesser dieser Kreise werden nämlich dann die Normalen der gesuchten Curve seyn, und die Summe der Abscisse und Subnormale wird gleich der Abscisse des Mittelpunctes seyn. Heisst also α die Abscisse des Mittelpunctes, und r der Halbmesser des Kreises, so ist die Gleichung desselben

$$y^2 + (x - \alpha)^2 = r^2$$

und da nach der Bedingung der Aufgabe

$$r^2 = b \, . \, \alpha$$

seyn soll, wo b eine constante Grösse ist, so hat man

$$y^2 + (x - \alpha)^2 = b \, . \, \alpha.$$

In dieser Gleichung lässt Leibnitz bloss die Grösse α variiren, wodurch er erhält

$$\alpha = x + \frac{b}{2}$$

und indem er diesen Werth von α in der vorhergehenden Gleichung substituirt, fand er

$$y^2 = b x + \frac{b^2}{4}$$

für die Parabel, wie zuvor. Diess war der erste Fall, wo man statt dem vollständigen Integral das particuläre fand, so wie die am angeführten Orte gegebene Abhandlung von Leibnitz die erste war, in welcher von einhüllenden Curven und von Variationen beständiger Grössen gehandelt wurde. Auch Johann Bernoulli (Vol. III. Lect. XIV. seiner Werke) beschäftigte sich mit der Auflösung dieser Aufgabe, und fand dieselbe Parabel, wie Leibnitz. Beyde bemerkten aber nicht, dass ihre Auflösung nicht die vollständige seyn konnte, obschon die Parabel allerdings der Aufgabe auch Genüge thut, weil die von ihnen gefundene Gleichung der Parabel keine willkührliche Constante enthält, da doch die Aufgabe offenbar auf eine Differentialgleichung führt, deren vollständiges Integral eine solche willkührliche Constante enthalten muss. Die wahre Auflösung der Aufgabe nähmlich, so wie sie sich Leibnitz gegeben hat, ist in folgender Gleichung enthalten:

$$\text{Normale} = \sqrt{b\,(x + \text{Subnorm})} \text{ oder}$$

$$y\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = \sqrt{b\left(x + \frac{y\,dy}{dx}\right)}.$$

Aus ihr folgt

$$\frac{y\,dy}{dx} = \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + bx - y^2} \text{ oder}$$

$$\frac{b - \frac{2y\,dy}{dx}}{2\sqrt{\frac{b^2}{4} + bx - y^2}} + 1 = 0,$$

wovon das vollständige Integral ist

$$\sqrt{\frac{b^2}{4} + bx - y^2} = C - x,$$

wenn C die willkührliche Constante der Integration bezeichnet. Setzt man $C = 2\,(\alpha - b)$, wo α eine andere

willkührliche Constante ist, so ist die letzte Gleichung auch

$$y^2 + (x - \alpha)^2 = b\alpha$$

die Gleichung des Kreises, dessen Halbmesser gleich $\sqrt{b\alpha}$ und dessen Abscisse des Mittelpunctes gleich α ist. Dieser Kreis also ist es, der die Aufgabe in ihrer ganzen Allgemeinheit auflöst, die von Leibnitz und Joh. Bernoulli gefundene Parabel aber gibt nur einen besondern Fall der allgemeinen Auflösung.

4. §. Der Mittelpunct eines Kreises des Halbmessers r bewege sich auf einer krummen Linie, deren Gleichung durch $x = \alpha$, und $y = \varphi\alpha$ gegeben ist. Man suche die Curve, welche alle diese Kreise einhüllt.

Die Gleichung des Kreises ist

$$(x - \alpha)^2 + (y - \varphi\alpha)^2 = r^2$$

und das Differential dieses Ausdruckes in Beziehung auf α ist

$$(x - \alpha) + (y - \varphi\alpha) \cdot \frac{d\varphi\alpha}{d\alpha} = 0.$$

Die Gleichung der gesuchten einhüllenden Curve wird das Resultat der Elimination der Grösse α aus den beyden vorhergehenden Gleichungen seyn.

Ist z. B. die Curve, auf deren Peripherie sich der Mittelpunct jenes Kreises bewegt, wieder ein Kreis des Halbmessers R, so ist

$\varphi\alpha = \sqrt{R^2 - \alpha^2}$, also jene zwey Gleichungen

$$(x - \alpha) + (y - \sqrt{R^2 - \alpha^2})^2 = r^2$$

$$(x - \alpha) - (y - \sqrt{R^2 - \alpha^2}) \cdot \frac{\alpha}{\sqrt{R^2 - \alpha^2}} = 0.$$

Multiplicirt man die letzte Gleichung durch $\sqrt{R^2 - \alpha^2}$, so erhält man $\alpha = \frac{Rx}{\sqrt{x^2 + y^2}}$,

und diesen Werth von α in der ersten substituirt, gibt

$$x^2 + y^2 = (R \mp r)^2,$$

also die einhüllende Curve ein doppelter, dem vorher-

gehenden concentrischer Kreis; der Halbmesser des einen ist die Summe, der des andern Kreises die Differenz der Halbmesser R und r.

5. §. Ist überhaupt $U = 0$ die Gleichung einer Curve zwischen x und y, und einer Constante α, und gibt man der Grösse α nach und nach alle möglichen Werthe, so erhält man die Aufeinanderfolge von Curven, von denen sich je zwey nächste in einem oder mehreren Puncten schneiden. In der ganzen Reihe dieser Curven ist die Ordinate y auf eine zweyfache Art veränderlich, denn sie kann erstens von einem Puncte einer dieser Curven zu den nächstfolgenden Puncten *derselben* Curve, sie kann aber auch zweytens von einem Puncte einer dieser Curven, ohne dass die Abscisse geändert wird, zu einem Puncte der *nächstfolgenden* Curve übergehen. In dem ersten Falle ist x veränderlich, und das Differential von y ist daher $\left(\frac{dy}{dx}\right) dx$, und wird aus der folgenden Gleichung gefunden.

$$\left(\frac{dU}{dx}\right) dx + \left(\frac{dU}{dy}\right) dy = 0.$$

In dem zweyten Falle aber ist x constant, und α veränderlich, und das Differential von y ist $\left(\frac{dy}{d\alpha}\right) d\alpha$ und wird durch die Gleichung bestimmt.

$$\left(\frac{dU}{d\alpha}\right) d\alpha + \left(\frac{dU}{dy}\right) dy = 0.$$

Betrachtet man aber einen Punct, der beyden nächstfolgenden Curven gemeinschaftlich ist, der also auch zugleich für die einhüllende Curve gehört, so ist in beyden Curven der Werth von y derselbe, so dass man hat $\left(\frac{dy}{d\alpha}\right) = 0$, wodurch die letzte Gleichung in folgende übergeht

$$\left(\frac{dU}{d\alpha}\right) = 0$$

dieselbe, welche wir §. 2 gefunden haben, und die mit

$U = 0$ verbunden, als Resultat der Elimination von α, die gesuchte einhüllende Curve gibt.

I. Wäre die gegebene Gleichung $U = 0$ selbst schon eine Differentialgleichung der ersten Ordnung mit einer willkührlichen Constante α, so wären die auf einander folgenden Curven, die man durch die Änderung von α erhält, nicht mehr sich schneidende, sondern sich berührende Curven, denn indem man von einer dieser Curven zu der nächstfolgenden übergeht, ändert sich der Differentialcoefficient $\frac{dy}{dx}$ so wenig, als die Coordinaten x und y. In diesem Falle wird also auch die einhüllende Curve, welche man durch die Elimination von α aus den beyden Gleichungen

$$U = 0, \ \left(\frac{dU}{d\alpha}\right) = 0$$

erhält, eine solche seyn, die mit allen eingehüllten Curven eine Berührung der *zweyten* Ordnung hat. Es ist leicht diese Betrachtung auch auf die höheren Ordnungen fortzuführen.

6. §. Besonders merkwürdig unter den einhüllenden Curven sind diejenigen, welche durch die Bewegung des Mittelpunctes eines *Kreises* auf einer gegebenen Curve entstehen.

Ist $\beta = \varphi\,\alpha$ die Gleichung der gegebenen Curve, und x, y die Coordinaten der einhüllenden Curve, endlich r der constante Halbmesser des beweglichen Kreises, so ist nach §. 4 die Gleichung der einhüllenden Curve das Resultat der Elimination von α aus den beyden Gleichungen

$$(x - \alpha)^2 + (y - \varphi\,\alpha)^2 - r^2 = 0$$

$$x - \alpha + (y - \varphi\,\alpha)^2 . \frac{d\varphi\,\alpha}{d\alpha} = 0.$$

Aus diesen beyden Gleichungen findet man sofort

$$x = \alpha - \lambda r . \left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)$$

$$y = \beta + \lambda r,$$

wenn der Kürze wegen

$$\lambda = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)^2}}$$

gesetzt wird.

Differentiirt man aber die beyden letzten Gleichungen, so erhält man

$$\left(\frac{dx}{d\alpha}\right) = 1 - \lambda^3 r.\left(\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}\right) \text{ und}$$

$$\left(\frac{dy}{d\alpha}\right) = \left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right).\left[1 - \lambda^3 r.\left(\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}\right)\right],$$

also auch

$$\left(\frac{dy}{d\alpha}\right) = \left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)\left(\frac{dx}{d\alpha}\right) \text{ oder}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = \left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)$$

und aus der letzten Gleichung folgt, dass die Tangenten der eingehüllten und der einhüllenden Curven, also auch diese beyden Curven selbst in den beyden zusammen gehörenden Puncten derselben einander parallel sind. Man hat daher diese beyden Curven *parallele Curven* genannt.

Weiter ist die Gleichung der Normale der gegebenen Curve $\beta = \varphi\,\alpha$ (nach dem Vorhergehenden)

$$y' - \beta = -\left(\frac{d\alpha}{d\beta}\right)(x' - \alpha),$$

wo x', y' die veränderlichen Coordinaten der Normale bezeichnen. Substituirt man in dieser Gleichung für x', y' die oben gefundenen Werthe von x und y, so erhält man eine identische Gleichung, woraus folgt, dass jene beyde zusammengehörende Puncte in einer Geraden liegen, die auf beyden Curven senkrecht steht. Die Distanz dieser beyden Puncte endlich ist gleich

$$\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2}$$

oder gleich dem Halbmesser r des beweglichen Kreises. Das doppelte Zeichen der Grösse λ zeigt an, dass auf

auf der andern Seite der gegebenen Curve noch eine der vorigen ähnliche parallele Curve liegt.

I. Wenn die gegebene Curve nur durch eine Differentialgleichung der ersten Ordnung

$$\varphi \left(\alpha . \beta . \frac{d\beta}{d\alpha}\right) = 0$$

ausgedrückt ist, so hat man wieder, wenn man die vorigen Bezeichnungen beybehält,

$$\beta = y - \lambda r$$
$$\alpha = x + \lambda r . \left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right),$$

und da, nach dem Vorhergehenden, die Tangenten beyder Curven parallel sind,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = \left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right).$$

Eliminirt man aus diesen vier Gleichungen die drey Grössen α, β und $\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)$, so erhält man die gesuchte Gleichung *der parallelen Curve* in x, y, oder substituirt man die durch die drey letzten Gleichungen gegebenen Werthe von α, β und $\frac{d\beta}{d\alpha}$ in der ersten Gleichung

$$\varphi \left(\alpha . \beta . \frac{d\beta}{d\alpha}\right) = 0,$$

so erhält man die gesuchte Differentialgleichung der *parallelen* Curve. Vergleiche §. 5. I.

7. §. Wir wollen uns nun zwey willkührlich entfernte Gerade denken, deren jede auf der gegebenen sowohl, als auf der parallelen Curve senkrecht steht. (§. 6.) Sey s der Bogen der parallelen und σ der Bogen der gegebenen Curve, der zwischen jenen beyden Geraden enthalten ist, also auch

$$\left(\frac{ds}{d\alpha}\right)^2 = \left(\frac{dx}{d\alpha}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\alpha}\right)^2 \text{ und } \left(\frac{d\sigma}{d\alpha}\right)^2 = 1 + \left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)^2.$$

Es war aber nach dem Vorhergehenden

$$\left(\frac{dy}{d\alpha}\right) = \left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)\left(\frac{dx}{d\alpha}\right),$$

also ist auch die erste dieser Gleichungen

$$\left(\frac{ds}{d\alpha}\right)=\left(\frac{d\sigma}{d\alpha}\right)\left(\frac{dx}{d\alpha}\right), \text{ oder}$$

$$\left(\frac{ds}{d\alpha}\right)=\left(\frac{d\sigma}{d\alpha}\right)-r\,\frac{\left(\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}\right)}{\left(\frac{d\sigma}{d\alpha}\right)^2},$$

und dieser Gleichung Integral ist

$$s=\sigma-r\ \text{Arc. tg.}\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)+\text{Const.}$$

Um die Constante der Integration zu bestimmen, sey a die trigonometrische Tangente des Winkels, welchen die Tangente der gegebenen Curve im Anfangspuncte des Bogens σ mit der Abscissenachse bildet, so ist $s=\sigma=0$ und $\frac{d\beta}{d\alpha}=a$, also Const. $=r$. Arc. tg. a,

also auch $s=\sigma+r\left(\text{Arc tg. }a-\text{Arc tg.}\frac{d\beta}{d\alpha}\right)$ oder,

$$s=\sigma+r\ \text{Arc tg.}\frac{a-\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)}{1+a\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)}.$$

Ist also ω der Winkel, unter welchem die beyden normalen Geraden in den Endpuncten des Bogens s und σ sich schneiden, so ist

$$s=\sigma+r\,.\,\omega$$

und eben so für den Bogen der parallelen Curve auf der andern Seite der gegebenen Curve

$$s'=\sigma-r\,.\,\omega,$$

und daher $\frac{s+s'}{2}=\sigma$.

Ähnliche Ausdrücke lassen sich auch für die Flächen finden, welche zwischen den Bogen s, s′, σ und den normalen Geraden enthalten sind.

M. s. Memorie di matematica e di fisica della società italiana Vol. XVI.

8. §. Die Methode der Elimination, welche in dem Vorhergehenden angewendet wurde, lässt sich auch auf die Auflösung anderer Aufgaben ausdehnen, von denen wir hier einige kurz anführen wollen.

I. Eine Gerade bewege sich so, dass die Summe ihrer Entfernungen vom Anfangspuncte der Coordinaten, in der Achse der x und y gerechnet, immer gleich einer constanten Grösse c sey.

Um die Curve zu finden, welche durch die auf einander folgenden Durchschnittspuncte dieser beweglichen Geraden entstehet, sey a die Entfernung der gegebenen Geraden vom Anfange in der Richtung der Achse der x, und b in jener der y, so ist die Gleichung der Geraden (Cap. I.)

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

und da nach der Bedingung der Aufgabe $a + b = c$ ist, so hat man

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{c - a} = 1 \ldots (I).$$

Das Differential dieser Gleichung in Beziehung auf a ist

$$a = \frac{c + x - y}{2},$$

und dieser Werth von a in (I) substituirt, gibt die Gleichung der gesuchten Curve

$$(y - x)^2 - 2c\,(x + y) + c^2 = 0,$$

welche für eine Parabel gehört.

Wäre die Bedingung der Bewegung $b^2 = a$, so würde man für die Curve der Durchschnittspuncte $y^2 + 4x = 0$, oder wieder die Parabel erhalten; und wäre die Bedingung der Bewegung $ab = 1$, so würde die Curve der Durchschnittspuncte $xy - \frac{1}{4} = 0$, oder eine gleichseitige Hyperbel seyn.

II. Soll sich die Gerade so bewegen, dass ihr senkrechter Abstand von dem Anfangspuncte der Coordina-

ten immer gleich einer constanten Grösse R ist, so ist, wenn Θ den Winkel der Geraden mit der Achse der x bezeichnet, die Gleichung dieser Geraden

$$x \operatorname{Sin} \Theta + y \operatorname{Cos} \Theta = R.$$

Das Differential derselben in Beziehung auf R gibt

$$\operatorname{tg.} \Theta = \frac{x}{y},$$

also ist die Curve der auf einander folgenden Durchschnittspuncte der beweglichen Geraden

$$x^2 + y^2 = R^2$$

der Kreis, dessen Halbmesser R, und dessen Mittelpunct der Anfang der Coordinaten ist.

III. Wenn sich endlich zwey Gerade, deren Gleichungen $y = ax + b$ und $y = a'x + b'$ sind, so bewegen, dass sie sich immer unter demselben Winkel ω schneiden, so ist

$$\operatorname{tg.} \omega = \frac{a' - a}{1 - a a'},$$

und wenn man in diesem Ausdrucke für a und a' ihre Werthe $\frac{y-b}{x}$ und $\frac{y-b'}{x}$ substituirt, so erhält man für die Gleichung der gesuchten Curve der Durchschnittspuncte beyder Geraden

$$x^2 + (y-b)(y-b') - x(b-b') \operatorname{Cotg} \omega = 0,$$

also den Kreis, dessen Halbmesser gleich $\frac{b-b'}{2 \operatorname{Sin} \omega}$ ist.

Siebentes Capitel.

Einhüllende Flächen.

1. §. Die vorhergehenden Betrachtungen lassen sich mit einigen Veränderungen auch auf Flächen ausdehnen. Es sey $U = o$ die Gleichung einer Fläche zwischen x y z und irgend einer Constante α. Für jeden bestimmten Werth dieser Constante wird also $U = o$ ebenfalls eine bestimmte Oberfläche ausdrücken. Gibt man daher der Grösse α nach und nach alle möglichen Werthe, so erhält man eine Folge von Flächen, deren jede von der andern nur durch ihren besondern Werth von α verschieden ist, und die Reihe aller dieser Flächen wird durch eine andere Oberfläche begränzt werden, von welcher letzteren jene alle umschlossen und berührt werden, und die wir, analog mit dem Vorhergehenden, die *einhüllende* Fläche nennen wollen.

Gibt man in der Gleichung $U = o$ der eingehüllten Fläche, nachdem α einen bestimmten Werth hatte, dieser Grösse einen andern nächsten Werth $\alpha + d\alpha$, so hat man die Gleichung der nächsten eingehüllten Fläche, die durch ihre Gestalt und Lage von der vorhergehenden nur unendlich wenig verschieden seyn, und diese in irgend einer Curve schneiden wird. Diese Curve, in welcher sich je zwey nächste eingehüllte Flächen schneiden, ist offenbar die gemeinschaftliche Berührungslinie der beyden eingehüllten Flächen mit ihrer einhüllenden, und die Puncte dieser Curve werden diejenigen der ersten eingehüllten Fläche seyn, für welche die Werthe von x y z sich nicht ändern, wenn in ihr

sich α in $\alpha + d\alpha$ ändert, das heisst also: differentiirt man die Gleichung $U = o$ bloss in Beziehung auf α, so gehört die resultirende Gleichung für jene Curve, und da diese Curve nothwendig auch ganz auf der ersten eingehüllten Fläche liegen muss, so sind die beyden Gleichungen der Curve, *in welcher sich zwey nächste eingehüllte Flächen schneiden*,

$$U = o \ldots . (I)$$

$$\left(\frac{dU}{d\alpha}\right) = o \ldots . (II).$$

Diese Curve ist also, wie bereits bemerkt, zugleich diejenige, *in welcher zwey nächste eingehüllte Flächen von der einhüllenden Fläche berührt werden.* Wir wollen diese Curve die *Characteristik* nennen.

Gibt man also in den beyden Gleichungen I, II der Grösse α nach und nach alle Werthe, so erhält man alle auf einander folgende Characteristiken, welche sich alle auf der einhüllenden Fläche befinden, und aus denen allein, wenn man sich so ausdrücken darf, die einhüllende Fläche besteht. Eliminirt man daher aus jenen beyden Gleichungen die Grösse α, so erhält man in x y z eine Gleichung, welche, da sie von α unabhängig ist, für alle Characteristiken, das heisst, für die *einhüllende Fläche* selbst gehört.

Wenn man in den Gleichungen I, II, nachdem man der Grösse α einen bestimmten Werth gegeben hat, (wodurch die Lage der Characteristik im Raume für einen besondern Fall bestimmt wird), diese Grösse α in $\alpha + d\alpha$ übergehen lässt, so werden die zwey neuen Gleichungen I, II für die nächstfolgende Characteristik gehören, die der Form und Lage nach von der Vorhergehenden nur unendlich wenig verschieden seyn, und sie im Allgemeinen in einem oder mehreren Puncten schneiden wird. Dieser Durchschnittspunct zweyer nächsten Characteristiken wird offenbar derjenige Punct der ersten Characteristik seyn, für welchen die Werthe von

$x\,y\,z$ sich nicht ändern, wenn sich (in den Gleichungen I, II) der Werth von α ändert, und in $\alpha + d\,\alpha$ übergeht. Wenn man daher die beyden vorhergehenden Gleichungen bloss in Beziehung auf α differentiirt, so werden die beyden so erhaltenen Gleichungen für jenen Durchschnittspunct der zwey nächsten Characteristiken gehören, und da dieser Punct sich auch zugleich auf der ersten Characteristik befindet, da überdiess die Differentiation von I die Gleichung II hervorbringt, so hat man für diesen Durchschnittspunct die drey Gleichungen

$$U = o \ldots. \text{(I)}$$

$$\left(\frac{dU}{d\alpha}\right) = o \ldots. \text{(II)}$$

$$\left(\frac{d^2 U}{d\alpha^2}\right) = o \ldots. \text{(III)},$$

in welchen der Werth von α diejenigen aller Characteristiken bestimmt, auf welchen man den Durchschnitt derselben mit der nächstfolgenden Characteristik betrachtet.

Gibt man daher in den drey vorhergehenden Gleichungen der Grösse α nach und nach alle möglichen Werthe, so erhält man die Aufeinanderfolge der Durchschnittspuncte jeder zwey nächsten Characteristiken: eliminirt man also die Grösse α aus jenen drey Gleichungen, so erhält man zwey andere Gleichungen in $x\ y\ z$ ohne α, welche zwey Gleichungen für die *Curve gehören, welche von jenen auf einander folgenden Durchschnittspuncten je zwey nächster Characteristiken gebildet wird.* Wir wollen diese Curve die *Wendungscurve* (Arete de rebroussement) nennen. Man sieht, dass die Wendungscurve von allen Characteristiken eben so berührt wird, wie die einhüllende Fläche von allen eingehüllten berührt wird. Diese Wendungscurve berührt nicht nur alle möglichen Flächen, welche in der Gleichung $U = o$ enthalten sind, sondern jedes Element dieser

Curve befindet sich auf je drey nächst folgenden dieser eingehüllten Flächen.

Beyspiele werden diess deutlicher machen.

2. §. Auf der Ebene der x y sey irgend eine Curve verzeichnet, deren Gleichung $y = \varphi x$ seyn soll. Der Mittelpunct einer Kugel, deren Halbmesser r ist, bewege sich auf jener Curve. Der Raum, welchen die Kugel durchläuft, wird die einhüllende Fläche aller dieser Kugeln seyn.

Ist α der Werth von x für irgend eine bestimmte Lage des Mittelpunctes der Kugel, so ist die Gleichung der Kugel

$$(x - \alpha)^2 + (y - \varphi\alpha)^2 + z^2 = r^2 \ldots (I),$$

Setzt man der Kürze wegen

$$\varphi'\alpha = \frac{d.\varphi\alpha}{d\alpha},\ \varphi''\alpha = \frac{d.\varphi'\alpha}{d\alpha},$$

und differentiirt man die vorhergehende Gleichung zweymahl in Beziehung auf α, so hat man

$$(x - \alpha) + (y - \varphi\alpha).\varphi'\alpha = 0 \ldots (II)$$

$$(y - \varphi\alpha).\varphi''\alpha - 1 - (\varphi'\alpha)^2 = 0 \ldots (III).$$

Die Gleichungen I, II zusammen genommen, gehören für die Characteristik der einhüllenden Fläche.

Eliminirt man aber aus I und II die Grösse α, so erhält man eine Gleichung in x y z, welche die Gleichung der einhüllenden Fläche selbst ist.

Die Gleichungen I, II, III zusammen genommen, gehören für den Durchschnittspunct je zweyer nächsten Characteristiken.

Eliminirt man aber aus I, II und III die Grösse α, so erhält man zwey Gleichungen in x y z, welche für die Wendungscurve der einhüllenden Fläche gehören.

Um dieses auf ein besonderes Beyspiel anzuwenden, sey die Curve, auf welcher sich der Mittelpunct der Kugel bewegt, ein Kreis des Halbmessers R, so ist

$$\varphi\alpha = \sqrt{R^2 - \alpha^2},$$

$$\varphi' \alpha = -\frac{\alpha}{\sqrt{R^2 - \alpha^2}} \text{ und } \varphi'' \alpha = -\frac{\alpha^2}{(R^2 - \alpha^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{\sqrt{R^2 - \alpha^2}}$$

also jene drey Gleichungen

$$(x - \alpha)^2 + (y - \sqrt{R^2 - \alpha^2})^2 + z^2 = r^2 \ldots . (I)$$

$$x = \frac{\alpha\, y}{\sqrt{R^2 - \alpha^2}} \ldots . (II)$$

$$\frac{R^2\, y}{(R^2 - \alpha^2)^{\frac{3}{2}}} = 0 \ldots . (III).$$

Eliminirt man α aus I und II, so ist die gesuchte Gleichung der einhüllenden Fläche

$$R + \sqrt{r^2 - z^2} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Die zwey Gleichungen I und II zusammen genommen, gehören für die Characteristik, und man sieht, dass diese Characteristik eine ebene Curve ist, weil ihre Projection in x y (Gleichung II) eine gerade Linie ist. Diese Curve liegt also in einer auf x y senkrechten Ebene. Ist ψ der Winkel der Knotenlinie dieser Ebene mit der Ebene der x y, so ist

$$\text{tg}\, \psi = \frac{\sqrt{R^2 - \alpha^2}}{\alpha}, \text{ also } \text{Cos}\, \psi = \frac{\alpha}{R}$$

und substituirt man den Werth von y aus II in I, so hat man

$$(x - \alpha)^2 \cdot \frac{R^2}{\alpha^2} + z^2 = r^2,$$

welche Gleichung, wenn man in ihr $x = x' \text{Cos}\, \psi$ setzt, in folgende übergeht

$$(x' - R)^2 + z^2 = r^2$$

also ist die Characteristik ein Kreis, dessen Halbmesser r, dessen Mittelpunct in der Achse der x liegt, und von dem Anfangspuncte der Coordinaten um die Grösse R entfernt ist.

Wäre die feste Curve in der Ebene der x y, wie zuvor, ein Kreis des Halbmessers R, und bewegt sich

auf der Peripherie dieses Kreises der Mittelpunct eines Ellipsoids, welches durch die Rotation einer Ellipse um die Achse der z entstanden, und dessen halbe grosse und kleine Achse A und B ist, so hat man für die Gleichung dieses Ellipsoids

$$x^2 + y^2 + \frac{B^2 z^2}{A^2} = B^2$$

oder für unsern Fall

$$(x-\alpha)^2 + (y - \sqrt{R^2-\alpha^2})^2 + \frac{B^2 z^2}{A^2} = B^2 \ldots (I)$$

und dessen Differential

$$x - \alpha - (y - \sqrt{R^2-\alpha^2}) \cdot \frac{\alpha}{\sqrt{R^2-\alpha^2}} = o \ldots (II).$$

Eliminirt man aus diesen beyden Gleichungen die Grösse α, so erhält man

$$R + \frac{B}{A} \cdot \sqrt{A^2 - z^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

für die gesuchte einhüllende Fläche. Setzt man in diesem Ausdrucke $B = A = r$, so erhält man den vorhin gefundenen Ausdruck.

3. §. Die einhüllende Fläche, die Characteristik und die Wendungscurve derselben lässt sich aber noch auf eine andere merkwürdige Weise finden. Zu diesem Zwecke wollen wir die vorhergehenden zwey Gleichungen

$$(x - \alpha)^2 + (y - \varphi\,\alpha)^2 + z^2 = r^2 \ldots (I)$$

$$x - \alpha + (y - \varphi\,\alpha) \cdot \varphi'\alpha = o \ldots (II)$$

wieder vornehmen. Die erste derselben gibt

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = -\frac{(x-\alpha)}{z} \text{ und } \left(\frac{dz}{dy}\right) = -\frac{(y-\varphi\,\alpha)}{z}.$$

Substituirt man diese Werthe von $x - \alpha$ und $y - \varphi\,\alpha$ in der Gleichung I, so erhält man

$$1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 = \frac{r^2}{z^2} \ldots (A)$$

für die Gleichung der einhüllenden Fläche.

Eben so gibt die Gleichung II

$$\varphi' \alpha = -\frac{dx}{dy}$$

und wenn man diesen Werth von $\varphi'\alpha$, so wie die vorhergehende von $x - \alpha$, und $y - \varphi\alpha$ in der Gleichung II substituirt, so erhält man

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) . dy - \left(\frac{dz}{dy}\right) . dx = o \ldots (B)$$

und die beyden Gleichungen A und B zusammen genommen, sind die Gleichungen der Characteristik.

Da endlich die beyden Gleichungen A und B für alle Characteristiken gehören, welches auch der Werth von den Grössen $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ und $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ seyn mag, so wird man die Gleichungen der Wendungscurve erhalten, wenn man aus den beyden Gleichungen A, B und aus der folgenden allgemeinen Gleichung aller Flächen

$$dz = \left(\frac{dz}{dx}\right) dx + \left(\frac{dz}{dy}\right) dy$$

die beyden Grössen $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ und $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ eliminirt oder die Gleichung der Wendungscurve wird seyn

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = \frac{r^2}{z^2} (dx^2 + dy^2) \ldots (C).$$

Die Gleichung der einhüllenden Fläche ist also entweder das Resultat der Elimination von α aus den beyden Gleichungen I. II., oder sie ist eine einzige Gleichung (A), aber mit partiellen Differentialien.

Die Characteristik wird entweder durch die zwey Gleichungen I. und II. mit einer willkührlichen Function ausgedrückt, oder auch durch die zwey Gleichungen A und B, von denen die erste nur partielle, die zweyte aber sowohl partielle, als auch gewöhnliche Differentialien enthält.

Die Wendungscurve endlich wird entweder durch zwey Gleichungen ausgedrückt, welche das Resultat der Elimination von α aus den drey Gleichungen I. II. III. sind, oder auch durch eine einzige Gleichung (C),

welche bloss gewöhnliche, aber keine partiellen Differentialien enthält.

4. §. Wir haben die Gleichungen A, B, C durch Differentialien der Ausdrücke I. und II. gefunden. Sie lassen sich aber auch unmittelbar auf folgende Art finden.

Die Fläche, welche alle beweglichen Kugeln einhüllt, hat offenbar die Eigenschaft, dass alle Normalen dieser Fläche die Cruve schneiden, in welchen die Mittelpuncte jener Kugeln liegen, und dass die Theile dieser Normalen, welche zwischen der einhüllenden Fläche und dieser Curve enthalten sind, gleich dem Halbmesser r der Kugeln sind. Die Gleichungen der Normale sind aber

$$x' - x + (z' - z)\left(\frac{dz}{dx}\right) = 0$$

$$y' - y + (z' - z)\left(\frac{dz}{dy}\right) = 0,$$

also ist die Grösse dieser Normale zwischen den Puncten x y z und x' y' z' gleich

$$\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2} =$$

$$(z' - z)\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2},$$

und daher der Theil der Normale, der zwischen dem Puncte x y z und der Ebene der x' y' enthalten ist, wenn man in dem vorigen Ausdrucke z' = o setzt

$$-z\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2},$$

und da nach dem Vorhergehenden dieser Theil gleich dem Halbmesser r seyn soll, so hat man

$$1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 = \frac{r^2}{z^2},$$

welches also die Gleichung (A) der einhüllenden Fläche ist.

Die Characteristik ist unter allen Curven, welche in der einhüllenden Fläche liegen und durch den gegebenen Punct gehen, diejenige, deren Tangente den gröss-

ten Winkel mit der horizontalen Ebene der x' y' bildet, woraus folgt, dass die Projection dieser Tangente in x' y' auf die Knotenlinie der tangirenden Ebene in x' y' senkrecht seyn muss. Aber die Projection der Tangente in x' y' ist

$$y' - y = (x' - x)\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

und die Knotenlinie der tangirenden Ebene in x' y' ist

$$-z = (x' - x)\left(\frac{dz}{dx}\right) + (y' - y)\left(\frac{dz}{dy}\right)$$

und da diese beyden Linien auf einander senkrecht stehen sollen, so ist

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) dy - \left(\frac{dz}{dy}\right) dx = 0,$$

welches die Gleichung (B) ist, die mit A_4 verbunden, die Characteristik gibt.

Endlich da die Wendungscurve in jedem ihrer Puncte eine Characteristik berührt, so wird die Tangente dieser beyden Curven zusammen fallen. Sind aber x y z die Coordinaten des Berührungspunctes, und ist ω der Winkel, welchen die Tangente der Wendungscurve mit der Ebene der x' y' macht, so ist

$$\text{tg. } \omega = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}, \text{ oder}$$

$$\text{Cos } \omega = \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2}{dx^2 + dy^2 + dz^2}}.$$

Ist aber ω' der Winkel, welchen die Tangente eines verticalen Kreises des Halbmessers r mit der Ebene der x y macht, so ist

$$\text{Cos } \omega' = \frac{z}{r},$$

und da nach dem Vorhergehenden beyde Tangenten zusammenfallen, also $\omega = \omega'$ seyn soll, so hat man

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = \frac{r^2}{z^2}(dx^2 + dy^2),$$

welches die Gleichung (C) der Wendungscurve ist.

Auch lässt sich leicht zeigen, dass die Gleichung

(B) der Characteristik immer unmittelbar aus der Gleichung (A) der einhüllenden Fläche abgeleitet werden kann. Denn setzt man der Kürze wegen $p = \left(\frac{dz}{dx}\right)$ und $q = \left(\frac{dz}{dy}\right)$, so ist klar, dass, da die einhüllende und die eingehüllte Fläche in ihren Berührungspuncten dieselbe tangirende Ebene haben, die Werthe von x, y, z und von p q dieselben bleiben werden, man mag den Berührungspunct als zu der einhüllenden oder als zu der eingehüllten Fläche gehörend ansehen, so lange man bey *derselben* eingehüllten Fläche stehen bleibt. Geht man aber von einer eingehüllten Fläche zu der nächstfolgenden über, so wird sich die Gleichung dieser von jener der vorhergehenden nur durch die neuen Werthe von p und q unterscheiden, weil diese zwey Grössen allein von dem Werthe abhängen, welchen die Grösse α für jeden besondern Fall bekömmt. Da aber, wie wir gesehen haben, die Gleichung der Characteristik erhalten wird, wenn man die Gleichung der einhüllenden Fläche in Beziehung auf α differentiirt, so sey

$$P\,dp + Q\,dq = 0$$

das Differential der Gleichung (A) der einhüllenden Fläche in Beziehung auf p und q genommen.

Sieht man bloss die Grösse α als veränderlich an, so ist

$$P\left(\frac{dp}{d\alpha}\right) + Q\left(\frac{dq}{d\alpha}\right) = 0 \ldots (1),$$

Überdiess ist für jede Fläche

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

also auch

$$\left(\frac{dp}{d\alpha}\right)dx + \left(\frac{dq}{d\alpha}\right)dy = 0 \ldots (2),$$

und die Gleichungen 1 und 2 geben

$$P \,.\, dy - Q \,.\, dx = 0 \ldots (3)$$

und diese Gleichung ist es, welche in allen Fällen der Gleichung (B) gleichgeltend ist.

Für unsern gegenwärtigen Fall ist $P = p$ und $Q = q$, also die Gleichung (3)

$$p \cdot dy - q \cdot dx = o,$$

welcher Ausdruck mit (B) identisch ist.

5. §. Bewegt sich auf derselben fixen Curve die Spitze eines Kegels mit kreisförmiger Basis, dessen Achse senkrecht auf der Ebene der x y steht, und dessen Seite mit der Ebene der x y den Winkel ϑ bildet, so ist die Gleichung des Kegels

$$z^2 \operatorname{Cotg.}^2 \vartheta = (x - \alpha)^2 + (y - \varphi\alpha)^2 \ldots \mathrm{I}.$$

Das erste und zweyte Differential dieser Gleichung ist

$$(y - \varphi\alpha) \cdot \varphi'\alpha + x - \alpha = o \ldots \mathrm{II}$$

$$(y - \varphi\alpha) \cdot \varphi''\alpha - 1 - (\varphi'\alpha)^2 = o \ldots \mathrm{III},$$

und die beyden Gleichungen I II gehören für die Characteristik der Fläche, welche jenen beweglichen Kegel einhüllt. Diese einhüllende Fläche selbst wird zur Gleichung das Resultat der Elimination von α aus den beyden Gleichungen I, II haben. Die Elimination von α aus allen drey Gleichungen endlich wird die zwey Gleichungen der Wendungscurve dieser einhüllenden Fläche geben. Auch findet man, wenn man das §. 4 angeführte Verfahren hier anwendet, für die Gleichung der einhüllenden Fläche

$$\operatorname{tg.}^2 \vartheta = \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 \ldots (\mathrm{A})$$

und diese mit der folgenden

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) dy - \left(\frac{dz}{dy}\right) dx = o \ldots (\mathrm{B})$$

verbunden, gibt die Characteristik. Die Gleichung der Wendungscurve endlich ist

$$dz^2 \cdot \operatorname{Cotg}^2 \vartheta = dx^2 + dy^2 \ldots (\mathrm{C}).$$

6. §. Die Gleichung der einhüllenden Fläche zwi-

schen partiellen Differentialien lässt sich auch noch auf eine andere merkwürdige Art aus der gegebenen endlichen Gleichung der eingehüllten ableiten. Von den zwey Gleichungen des §. 1

$$U = o, \left(\frac{dU}{d\alpha}\right) = o,$$

welche bekanntlich nach der Elimination von α die Gleichung der einhüllenden Fläche geben, drückt die zweyte aus, dass das Differential der ersten, bloss in Beziehung auf α genommen, gleich Null ist, woraus folgt, dass man die erste auch unter der Voraussetzung, dass α eine constante Grösse ist, differentiiren kann. Aber diese erste Gleichung U = o gehört für eine Fläche, in welcher immer zwey der drey Coordinaten, z. B. x und y von einander unabhängig sind, so wie auch ihre Differentialien dx und dy. Also müssen auch die Differentialien dieser ersten Gleichung in Beziehung auf zx sowohl, als auch auf zy, jedes für sich bestehen können. Diese zwey partiellen Differentialgleichungen, verbunden mit der ursprünglichen Gleichung U = o werden drey Gleichungen geben, aus denen man die zwey Grössen α und $\varphi\,\alpha$ eliminiren kann, und das Resultat dieser Elimination kann nichts anders, als die gesuchte Gleichung der einhüllenden Fläche in partiellen Differentialien seyn, denn, indem man α eliminirt, überträgt man auf die einhüllende Fläche, was zuerst nur von der eingehüllten galt, und, indem man $\varphi\,\alpha$ eliminirt, überträgt man auf alle möglichen einhüllenden Flächen, was zuerst nur von einer bestimmten einhüllenden Fläche galt, für welche nähmlich die Function φ irgend eine bestimmte Form hat.

Ex. Ist die eingehüllte Fläche die Kugel des §. 2, so hat man

$$U = o = (x - \alpha)^2 + (y - \varphi\,\alpha)^2 + z^2 - r^2,$$

und davon sind die partiellen Differentialien

$$z\left(\frac{dz}{dx}\right)+x-\alpha=0$$

$$z\left(\frac{dz}{dy}\right)+y-\varphi\alpha=0.$$

Eliminirt man aus diesen drey Gleichungen die zwey Grössen α und $\varphi\alpha$, so erhält man

$$1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2=\frac{r^2}{z^2},$$

welches die in §. 3 und 4 gefundene Gleichung der einhüllenden Fläche ist.

7. §. Übrigens hat jede Fläche, als eine einhüllende betrachtet, eine unzählige Menge eingehüllter Flächen. Denn wenn irgend ein Gegenstand durch *eine einzige* Gleichung ausgedrückt wird, so ist diese Gleichung allerdings nothwendig, und kann durch keine andere Gleichung ersetzt werden; aber wenn der Gegenstand durch zwey oder mehrere Gleichungen ausgedrückt wird, so ist keine einzige dieser Gleichungen absolut nothwendig, und es gibt eine unendliche Anzahl Systeme von andern Gleichungen, die dem ersten völlig gleichgeltend sind. So wird eine Curve von doppelter Krümmung durch zwey Gleichungen ausgedrückt, d. h. durch zwey Flächen, welche sich schneiden, und um diese Curve des Durchschnittes auszudrücken, ist weder die eine noch die andere dieser beyden Flächen nothwendig, denn es gibt eine unendliche Anzahl von Flächen, von denen je zwey sich immer in derselben Curve schneiden. So werden wir in §. 2 dieselbe einhüllende Fläche erhalten, wenn man statt der dort angewandten Kugel die horizontale Achse eines kreisförmigen Cylinders sich so bewegen lässt, dass diese Achse immer Tangente der Curve $y=\varphi x$ ist. Die Gleichung dieser Tangente für den Punct der Curve, für den $x=\alpha$ ist, wird nähmlich seyn

$$y-\varphi\alpha=(x-\alpha)\,.\,\varphi'\alpha,\ \text{wo}\ \varphi'\alpha=\frac{d\varphi\alpha}{d\alpha}\ \text{ist},$$

und wenn man annimmt, dass der Mittelpunct einer Kugel des Halbmessers r auf dieser Tangente sich bewegt, so wird diese Kugel unsern Cylinder beschreiben. Ist also b der Werth von x für irgend einen Punct dieser Tangente, so ist die Gleichung unserer Kugel, deren Mittelpunct in jenem Puncte ist,

$$(x-b)^2+[y-\varphi\alpha-(b-\alpha)\varphi'\alpha]^2+z^2=r^2.$$

Differentiirt man diese Gleichung in Beziehung auf b, so hat man

$$x-b+b[y-\varphi\alpha-(b-\alpha)\varphi'\alpha].\varphi'\alpha=0,$$

und wenn man aus diesen beyden Gleichungen die Grösse b eliminirt, so erhält man für die gesuchte Gleichung unsers beweglichen Cylinders

$$[(x-\alpha)\varphi'\alpha-(y-\varphi\alpha)]^2=(r^2-z^2).[1+(\varphi'\alpha)^2]\ldots\text{I.}$$

Betrachtet man diesen Cylinder als die eingehüllte Fläche, und differentiirt seine Gleichung zweymahl in Beziehung auf α, so erhält man

$$(x-\alpha)^2.\varphi'\alpha-(x-\alpha)(y-\varphi\alpha)=(r^2-z^2).\varphi'\alpha\ldots\text{II.}$$
$$(x-\alpha)^2.\varphi''\alpha-(x-\alpha).\varphi'\alpha+y-\varphi\alpha=(r^2-z^2).\varphi''\alpha\ldots\text{III.}$$

und auch hier wird, wie in §. 2. die Elimination von α aus den beyden Gleichungen I. II. die gesuchte Gleichung der einhüllenden Fläche geben. Um diese Gleichung nach §. 6. in partiellen Differentialien zu finden, hat man für die partiellen Differentialien der Gleichung I.

$$[(x-\alpha)\varphi'\alpha-(y-\varphi\alpha)].\varphi'\alpha=-z\left(\frac{dz}{dx}\right)[1+(\varphi'\alpha)^2]$$

und

$$[(x-\alpha)\varphi'\alpha-(y-\varphi\alpha)]=z\left(\frac{dz}{dy}\right)[1+(\varphi'\alpha)^2].$$

Die zwey letzten geben

$$\varphi'\alpha=-\left(\frac{dz}{dx}\right):\left(\frac{dz}{dy}\right)$$

und wenn man den Werth von $(x-\alpha)\varphi'\alpha-(y-\varphi\alpha)$ aus der letzten in I. substituirt,

$$z^2\left(\frac{dz}{dy}\right)^2.[1+(\varphi'\alpha)^2]=r^2-z^2$$

$$\text{oder } 1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2=\frac{r^2}{z^2},$$

also *dieselbe* einhüllende Fläche, welche wir schon §. 3. und 4. gefunden haben, obschon die einhüllende von der dort angenommenen völlig verschieden ist.

8. §. So wie sich endlich §. 6 die Gleichung der einhüllenden Fläche durch partielle Differentiirung der eingehüllten Fläche finden liess, eben so wird man die Gleichung der Wendungscurve in *gewöhnlichen* Differentialien erhalten, wenn man die beyden Gleichungen

$$U=o,\ \left(\frac{dU}{d\alpha}\right)=o$$

der Characteristik, vollständig in Beziehung auf x y z differentiirt, wodurch man vier Gleichungen erhält, die durch die Elimination der Grössen α, $\varphi\alpha$ und $\varphi'\alpha$ die gesuchte Gleichung der Wendungscurve geben.

So waren in §. 2. die Gleichungen der Characteristik

$$(x-\alpha)^2+(y-\varphi\alpha)^2=r^2-z^2$$
$$x-\alpha+(y-\varphi\alpha).\varphi'\alpha=o,$$

also ihre vollständigen Differentialien

$$(x-\alpha)\,dx+(y-\varphi\alpha)\,dy+z\,dz=o$$
$$dx+dy.\varphi'\alpha=o,$$

und das Resultat der Elimination von α, $\varphi\alpha$ und $\varphi'\alpha$ aus diesen vier Gleichungen gibt

$$dx^2+dy^2+dz^2=\frac{r^2}{z^2}(dx^2+dy^2)$$

für die Gleichung der Wendungscurve, die wir schon in §. 3. erhalten haben.

9. §. Ist die Gleichung $A=o$ der einhüllenden Fläche mit partiellen Differentialien gegeben, so kann man daraus unmittelbar die Gleichung $B=o$ der Wendungscurve mit gewöhnlicher Differentiation ableiten, und umgekehrt. Denn ist $A=o$ gegeben, so substituire man in ihr den Werth von p aus der Gleichung $dz=pdx+qdy$, wodurch man eine Gleichung $A'=o$ zwischen x y z, ihren gewöhnlichen Differentialien dx,

dy, dz und der Grösse q erhält, und dann wird das Resultat der Elimination der Grösse q aus den beyden Gleichungen

$$A' = o, \left(\frac{dA'}{dq}\right) = o$$

die gesuchte Gleichung B = o der Wendungscurve seyn.

Ist aber umgekehrt die Gleichung B = o gegeben, so substituirt man in ihr für dz, dessen Werth $p\,dx + q\,dy$, wodurch man eine Gleichung $B' = o$ zwischen xyz, zwischen den partiellen Differentialien p, q und zwischen der Grösse $\frac{dy}{dx} = \omega$ erhält, und dann wird das Resultat der Elimination von ω aus den beyden Gleichungen

$$B' = o, \left(\frac{dB'}{d\omega}\right) = o$$

die gesuchte Gleichung A = o der einhüllenden Fläche geben.

Es ist aber nach dem Vorhergehenden A = o das Resultat der Elimination von α aus den beyden Gleichungen

$$U = o, \left(\frac{dU}{d\alpha}\right) = o \; .\; .\; .\; .\; \text{I.}$$

und eben so ist B = o das Resultat der Elimination derselben Grösse α aus den drey Gleichungen

$$U = o, \left(\frac{dU}{d\alpha}\right) = o, \left(\frac{d^2U}{d\alpha^2}\right) = o \; .\; .\; .\; .\; \text{II.}$$

Ist also von den beyden Gleichungen A = o, B = o irgend eine gegeben, und ist das Integral der zweyten unter den angeführten Formen I oder II bekannt, so ist auch das Integral der ersten bekannt; das heisst, ist das Integral von A = o durch die zwey Gleichungen I gegeben, so erhält man das Integral von B = o, wenn man die zwey Gleichungen I mit $\left(\frac{d^2U}{d\alpha^2}\right) = o$ combinirt: und ist das Integral von B = o durch die drey Gleichungen II gegeben, so erhält man das Integral von

$A = 0$, wenn man die dritte dieser Gleichungen III oder $\left(\frac{d^2 U}{d\alpha^2}\right) = 0$ unterdrückt oder weglässt. Man sieht daraus, dass die Integration der Gleichungen mit gewöhnlichen, auf Potenzen erhobenen Differentialien von der Integration der Gleichungen mit partiellen Differentialien abhängt.

10. §. Früher glaubte man, dass die Gleichungen mit der gewöhnlichen, auf Potenzen erhobenen Differentialien von drey veränderlichen Grössen, wenn sie den bekannten Bedingungen der Integrabilität nicht Genüge thun, auch keine Bedeutung haben, oder absurd seyen. Aber das Vorhergehende zeigt, dass diese Gleichungen immer wahre Integralien haben, dass nähmlich ihre geometrischen Orte durch Curven von doppelter Krümmung ausgedrückt werden, die aber nur durch das System zweyer endlichen Gleichungen gegeben sind, während man früher sie durch eine einzige endliche Gleichung ausdrücken wollte, indem man voraussetzte, dass solche einzelne Differentialgleichungen für *Flächen* gehören, und das endlich diese Integralien willkührliche Functionen enthalten, die man früher nur bey der Integration der *partiellen* Differentialien gelten lassen wollte.

I. So gehört die Gleichung

$$dz^2 = (dx^2 + dy^2) \,.\, tg^2 \vartheta \ldots (A)$$

offenbar für eine Curve von doppelter Krümmung, deren Elemente oder deren Tangenten einen constanten Winkel ϑ mit der Ebene der xy bilden. Also werden auch alle Geraden, die denselben Winkel mit der Ebene der xy machen, der gegebenen Gleichung Genüge thun.

Die Gleichungen einer solchen Geraden sind

$$x = bz + a \ldots\ldots (B)$$

$$y = z\sqrt{Cotg^2 \vartheta - b^2} + c \ldots (C)$$

wo a, b, c drey Constante sind. In der That, differentiirt man diese Gleichungen, so hat man

$$dx = b\,dz$$

$$dy = dz \,.\, \sqrt{\mathrm{Cotg}^2\,\vartheta - b^2}$$

und wenn man aus diesen beyden Gleichungen die Grösse b eliminirt, so ist wieder

$$dz^2 = (dx^2 + dy^2)\,.\,\mathrm{tg}^2\,\vartheta$$

wie zuvor.

Aber, obschon das System der zwey Gleichungen B, C drey willkührliche Constanten a b c enthält, so sind sie doch noch nicht das vollständige Integral der Gleichung (A). Denn, wenn man aus diesen zwey Gleichungen B, C die Grösse b eliminirt, so erhält man

$$(x-a)^2 + (y-c)^2 = z^2\,\mathrm{Cotg}^2\,\vartheta,$$

welches bekanntlich die Gleichung eines senkrechten Kegels mit kreisförmiger Basis ist, dessen Spitze in der Ebene der x y, und dessen Seite mit der Ebene der x y den Winkel ϑ bildet. Macht man $c = \varphi a$, so hat man

$$(x-a)^2 + (y-\varphi a)^2 = z^2\,\mathrm{Cotg}^2\,\vartheta$$

für die Gleichung eines solchen Kegels, dessen Spitze sich auf einer in der Ebene der x y gezogenen Curve der Gleichung $y = \varphi x$ bewegt. Zwey nächste dieser Kegel werden sich in einer Geraden schneiden, deren Gleichungen sind

$$(x-a)^2 + (y-\varphi a)^2 = z^2\,\mathrm{Cotg}^2\,\vartheta \ldots (D)$$

$$x - a + (y-\varphi a)\,.\,\frac{d\varphi a}{da} = 0 \ldots . (E),$$

und da diese Gerade mit der Ebene der x y denselben constanten Winkel ϑ bildet, so wird auch sie der Gleichung (A) genug thun, oder die zwey Gleichungen D, E werden ebenfalls als ein Integral der Gleichung (A) zu betrachten seyn. Aber wenn man die ganze Folge dieser Kegel betrachtet, so erhält man ebenfalls eine

Folge solcher Geraden, die alle den Winkel ϑ mit der Ebene xy machen, und unter einander bloss durch die Grösse a verschieden sind, und da von allen diesen Geraden je zwey nächste sich auf einem und demselben Kegel befinden, so werden auch je zwey nächste dieser Geraden einander in einem Puncte schneiden, und daher die Tangenten einer Curve bilden, welche Curve der Ort aller jener Durchschnittspuncte ist. Da also die Tangenten dieser Curve von doppelter Krümmung alle um den Winkel ϑ gegen die Ebene der xy geneigt sind, so werden die Gleichungen dieser Curve als das *vollständige* Integral der Gleichung A zu betrachten seyn, oder, nach dem Vorhergehenden, das Integral der Gleichung A wird das Resultat der Elimination von a aus den drey Gleichungen seyn

$$(x-a)^2+(y-\varphi a)^2+z^2 \operatorname{Cotg}^2 \vartheta$$

$$x-a+(y-\varphi a)\cdot\frac{d\varphi a}{da}=0$$

$$1+\left(\frac{d\varphi a}{da}\right)^2-(y-\varphi a)\cdot\frac{d^2\varphi a}{da^2}=0.$$

Alles übereinstimmend mit dem, was §. 5. über denselben Gegenstand gefunden wurde.

II. Eben so fanden wir, dass das vollständige Integral der Gleichung (§. 3.)

$$dx^2+dy^2+dz^2=\frac{r^2}{z^2}(dx^2+dy^2)$$

die zwey endlichen Gleichungen sind, die man durch die Elimination der Grösse a aus den drey folgenden Gleichungen erhält

$$(x-a)^2+(y-\varphi a)^2+z^2-r^2=0$$

$$x-a+(y-\varphi a)\cdot\frac{d\varphi a}{da}=0$$

$$1+\left(\frac{d\varphi a}{da}\right)^2-(y-\varphi a)\cdot\frac{d^2\varphi a}{da^2}=0,$$

und dass der Ort dieses Integrals die Wendungscurve der Fläche ist, von welcher eine Kugel eingehüllt wird,

deren Halbmesser r ist, und deren Mittelpunct sich auf der horizontalen Curve $y = \varphi x$ bewegt.

III. Suchen wir noch auf dieselbe Art das vollständige Integral der Gleichung

$$(x\,dy - y\,dx)^2 + (y\,dz - z\,dy)^2 + (z\,dx - x\,dz)^2 = a^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2) \ldots . (A).$$

Dieser Gleichung kann man auch folgende einfache Form geben

$$d . \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - a^2} = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

und aus dieser Form sieht man leicht, dass sie für alle Curven von doppelter Krümmung gehört, deren Tangenten zugleich auch Tangenten einer Kugel sind, deren Halbmesser a und deren Mittelpunct im Anfange der Coordinaten ist. Also sind auch die Gleichungen aller Tangenten dieser Kugel als ein Integral der Gleichung (A) zu betrachten. Die Gleichungen dieser Tangenten sind aber

$$\alpha x + \beta y + z \sqrt{a^2 - \alpha^2 - \beta^2} = a^2$$
$$x - \alpha = \gamma . (y - \beta)$$

wo α, β die Coordinaten des Berührungspunctes sind, und wo γ die Richtung der Tangente bestimmt. Differentiirt man die beyden letzten Gleichungen, so erhält man die Gleichung (A) wieder. Demungeachtet sind die beyden letzten Gleichungen noch nicht das *vollständige* Integral der Gleichung (A). Die erste derselben ist die Gleichung einer die Kugel in einem Puncte tangirenden Ebene, dessen Coordinaten, in der Richtung der x und y, gleich α und β sind. Nimmt man also $\beta = \varphi\, \alpha$, so bestimmt man dadurch den Berührungspunct so, dass er auf einer Curve liegen muss, deren horizontale Projection $y = \varphi x$ ist, und die Gleichung der berührenden Ebene wird dann seyn

$$\alpha x + y\, \varphi\, \alpha + z \sqrt{a^2 - \alpha^2 - (\varphi\, \alpha)^2} = a^2 \ldots (B).$$

Zwey nächste dieser tangirenden Ebenen werden sich in einer geraden Linie schneiden, und diese Gerade Linie wird ebenfalls eine Tangente der Kugel seyn. Die beyden Gleichungen dieser Tangenten werden die Gleichung (B) und die folgende seyn

$$x + y \frac{d \varphi \alpha}{d \alpha} - z \cdot \frac{\alpha + \varphi \alpha \cdot \frac{d \varphi \alpha}{d \alpha}}{\sqrt{a^2 - \alpha^2 - (\varphi \alpha)^2}} = 0 \ldots (C),$$

und da diese Gerade, deren Gleichungen B, C sind, eine Tangente der Kugel ist, so werden die Gleichungen B, C ebenfalls als das Integral der Gleichung (A) zu betrachten seyn. Betrachtet man endlich die Aufeinanderfolge aller dieser Ebenen, welche die Kugel in allen Puncten der Curve $y = \varphi x$ berühren, so erhält man auch die Folge aller jener Geraden B, C, von denen je zwey nächste einander in einem Puncte schneiden müssen, weil je zwey nächste dieser Geraden immer auf *derselben* tangirenden Ebene liegen. Die Folge aller dieser Durchschnittspuncte wird eine Curve bilden, von welcher jene Geraden alle Tangenten seyn werden, und die Gleichungen dieser Curve von doppelter Krümmung werden das vollständige Integral der Gleichung (A) seyn, das heisst, nach dem Vorhergehenden, das vollständige Integral der Gleichung (A) ist das Resultat der Elimination von α aus den drey Gleichungen

$$\alpha x + y \varphi \alpha + z \psi \alpha = a^2$$

$$x + y \frac{d \varphi \alpha}{d \alpha} + z \cdot \frac{d \psi \alpha}{d \alpha} = 0$$

$$y \cdot \frac{d^2 \varphi \alpha}{d \alpha^2} + z \cdot \frac{d^2 \psi \alpha}{d \alpha^2} = 0,$$

wo der Kürze wegen $a^2 - \alpha^2 - (\varphi \alpha)^2 = (\psi \alpha)^2$ gesetzt wurde.

§. 11. Was in dem Vorhergehenden von den Integralien der Gleichungen mit gewöhnlichen, aber auf Potenzen erhobenen Differentialien, gesagt worden ist,

gilt auch von den so genannten lineären Differentialgleichungen mit drey gewöhnlichen Differentialien, welche den bekannten Bedingungen der Integrabilität nicht genug thun. Auch diese gehören, weit entfernt, absurd zu seyn, für wahre Curven von doppelter Krümmung, und haben daher wahre Integralien.

Sey $L\,dx + M\,dy + N\,dz = 0 \ldots (A)$ eine solche lineäre Differentialgleichung, die der Bedingung der Integrabilität nicht genug thut. Substituirt man in ihr, nach dem in §. 9. gezeigten Verfahren, für dz den Werth $p\,dx + q\,dy$, so erhält man

$$(L + Np)\,dx + (M + Nq)\,dy = 0.$$

Differentiirt man diese Gleichung bloss in Beziehung auf $\frac{dy}{dx}$, und eliminirt dann diese Grösse $\frac{dy}{dx}$, so erhält man

$$L + Np = 0 \ldots (B)$$
$$M + Nq = 0 \ldots (C).$$

Diess vorausgesetzt integrire man die Gleichung B in Beziehung auf x, oder die Gleichung (C) in Beziehung auf y, z. B. man integrire die erste

$$L\,dx + N\,dz = 0$$

in Beziehung auf z und x, und substituire den aus diesem Integrale erhaltenen Werth von q in der Gleichung (C), wodurch man eine zweyte Gleichung ohne Differential erhält, und beyde Gleichungen werden dann für die gesuchte Curve gehören, die der geometrische Ort der Gleichung (A) ist.

Ex. I. Sey die Gleichung gegeben

$$dz = xy(x\,dx + y\,dy) \ldots (A),$$

so ist

$$p = x^2 y \ldots B$$
$$q = x y^2 \ldots C.$$

Das Integral der Gleichung B in Beziehung auf z und x ist

$$z = \frac{x^3 y}{3} + \varphi y \ldots$$

Differentiirt man diese Gleichung auf y, so ist

$$q = \frac{x^3}{3} + \varphi' y,$$

und diesen Werth von q in C substituirt, gibt

$$x y^2 = \frac{x^3}{3} + \varphi' y.$$

Das Integral der Gleichung (A) ist daher das System der beyden Gleichungen

$$z = \frac{x^3 y}{3} + \varphi y$$

$$x y^2 = \frac{x^3}{3} + \varphi' y.$$

Man kann aber auch die Gleichungen B C durch folgende beyde ersetzen

$$p y - q x = o \ldots . B$$

$$p = x^2 y \ldots . C.$$

Das Integral von B ist

$$z = \varphi (x^2 + y^2),$$

und diesen Ausdruck für x differentiirt, gibt

$$p = 2 x . \varphi' (x^2 + y^2),$$

und dieser Werth von p in C substituirt, gibt

$$x y = 2 \varphi' (x^2 + y^2).$$

Das Integral der gegebenen Gleichung (A) ist also auch das System der beyden folgenden

$$\left.\begin{aligned} z &= \varphi (x^2 + y^2) \\ \tfrac{1}{2} x y &= \varphi' (x^2 + y^2) \end{aligned}\right\} \text{I.}$$

Also gehört die Gleichung A für eine Curve von doppelter Krümmung, die auf irgend einer durch Rotation entstandenen Fläche verzeichnet ist, wo die Achse der Rotation zugleich die Achse der z ist, und wo die Projection dieser Curve auf die Ebene der x y von der erzeugenden Curve auf die Art abhängt, welche durch die zweyte der Gleichungen I ausgedrückt wird.

I. Ist eben so die Gleichung

$$dz = xy\,(dx - dy) \ldots\ldots A$$

gegeben, so hat man für die Gleichungen B, C

$$p = xy$$
$$q = -xy$$

oder was dasselbe ist

$$p + q = o \ldots\ldots B$$
$$p = xy \ldots\ldots\ldots C.$$

Das Integral von B ist

$$z = \varphi\,(x - y)$$

und diese für x differentiirt, gibt

$$p = \varphi'\,(x - y),$$

und diesen Werth von p in C substituirt, gibt

$$xy = \varphi'\,(x - y).$$

Das Integral der Gleichung A ist daher das System der zwey Gleichungen

$$z = \varphi\,(x - y)$$
$$xy = \varphi'\,(x - y),$$

das heisst, die Gleichung A gehört für eine Curve von doppelter Krümmung, die auf einem Cylinder von willkührlicher Basis verzeichnet ist, dessen Achse in der Ebene der xy mit der Achse der x oder der y einen Winkel von 45 Graden bildet. Die Projection dieser Curve in der Ebene der xy hängt von der Basis der cylindrischen Fläche ab. Wir werden später wieder auf diesen Gegenstand zurück kommen.

II. Um diese Untersuchungen mit einer interessanten Aufgabe zu erläutern, wollen wir die Curve suchen, unter welcher die äusserste Gränze einer ihrer Gestalt und Lage nach gegebenen Fläche einem seiner Lage nach gegebenen Auge erscheint. Diese Curve ist die Berührungslinie der gegebenen Fläche mit einem dieser Fläche umschriebenen Kegel, dessen Spitze in dem Orte des Auges ist. Wir wollen annehmen, dass die gege-

bene Fläche durch Rotation einer Curve um die Achse der z entstanden sey, und dass die drey senkrechten, mit x y z parallelen Coordinaten des Auges a b c seyen.

Diess vorausgesetzt ist die Gleichung der Fläche

$$z = \varphi\,(x^2 + y^2)$$

und daher, mit partiellen Differentialien,

$$p\,y - q\,x = 0 \ldots\ldots (1).$$

Die Gleichung des Kegels aber ist, wie wir sogleich sehen werden,

$$\frac{z-c}{x-a} = \psi\,\frac{y-b}{x-a},$$

also auch mit partiellen Differentialien

$$p\,(x-a) + q\,(y-b) = z - c \ldots (2).$$

Da nun für die Berührungscurve nicht nur die Werthe von x y z, sondern auch die von p und q der Rotationsfläche sowohl als des Kegels dieselben seyn müssen, weil nach der ganzen Länge dieser Curve jene beyden Flächen immer eine gemeinschaftliche tangirende Ebene haben, so wird man aus den beyden Gleichungen (1) und (2) die Werthe von p und q, nähmlich

$$p = \frac{x\,(z-c)}{x\,(x-a) + y\,(y-b)} \text{ und } q = \frac{y\,(z-c)}{x\,(x-a) + y\,(y-b)}$$

suchen, und sie in den allgemeinen Ausdruck

$$d\,z = p\,d\,x + q\,d\,y$$

substituiren, wodurch man erhält

$$\frac{x\,(x-a) + y\,(y-b)}{z-c} = \frac{x\,d\,x + y\,d\,y}{d\,z} \ldots\ldots (A),$$

und diese Gleichung mit gewöhnlichen Differentialien, die den Bedingungen der Integrabilität nicht genug thut, ist die Gleichung der Curve, unter welcher die gegebene Fläche dem Auge erscheint. Behandelt man sie wie die der zwey vorhergehenden Aufgaben, so hat man für die Gleichungen B, C

$$p = \frac{x(z-c)}{x(x-a)+y(y-b)} \text{ und } q = \frac{y(z-c)}{x(x-a)+y(y-b)},$$

also auch

$$p\,y - q\,x = o \ldots\ldots (B)$$

$$p = \frac{x(z-c)}{x(x-a)+y(y-b)} \ldots\ldots (C).$$

Das Integral von B ist

$$z = \varphi\,(x^2 + y^2)$$

und diess in Beziehung auf x differentiirt, gibt

$$p = 2\,x\,.\,\varphi'\,(x^2 + y^2),$$

und diesen Werth von p in (C) substituirt, gibt

$$\varphi'(x^2+y^2) = \frac{\frac{1}{2}(z-c)}{x(x-a)+y(y-b)}.$$

Das Integral der Gleichung (A) oder der endliche Ausdruck der gesuchten Curve ist daher das System der zwey Gleichungen

$$z = \varphi\,(x^2 + y^2)$$

$$2\,[x(x-a) + y(y-b)].\,\varphi'(x^2+y^2) = \varphi(x^2+y^2) - c.$$

Vergleiche Capitel VIII. §. 8.

12. §. Die vorhergehenden Untersuchungen geben zugleich ein einfaches Mittel, die allgemeinen Gleichungen ganzer Familien von Flächen zu finden, indem man die geraden oder krummen Linien betrachtet, aus welchen diese Flächen gleichsam zusammen gesetzt sind. Sind U = o und V = o die Gleichungen dieser Linien, so wird diese Linie ihre Form sowohl, als ihre Lage im Raume ändern, wenn man die Constanten ändert, die in diesen Gleichungen enthalten sind. Nimmt man daher zwischen diesen Constanten irgend eine Relation an, so erhält man eine Bedingungsgleichung zwischen diesen Constanten, und durch diese Bedingungsgleichung wird man eine dieser Constanten aus den Gleichungen U = o, V = o eliminiren können, wodurch man, als Resultat der Elimination eine Glei-

chung erhält, die die Aufeinanderfolge einer unendlichen Menge von Linien, deren Gleichungen $U=o$, $V=o$ sind, das heisst, die die aus jenen Linien zusammen gesetzte Fläche ausdrückt.

Sucht man z. B. die Folge aller Geraden, die durch einen gegebenen Punct, dessen Coordinaten a b c sind, gehen, so hat man für die Gleichungen dieser Linien

$$x - a = \alpha (z - c)$$
$$y - b = \beta (z - c).$$

Setzt man aber voraus, dass $\beta = \varphi \alpha$ ist, und setzt man in der letzten Gleichung für α und β ihre Werthe aus den vorher gehenden Gleichungen, so hat man

$$\frac{y-b}{z-c} = \varphi \frac{x-a}{z-c}$$

für die Gleichung des Kegels, der durch die Bewegung jener Geraden entsteht, und dessen Scheitel in dem Puncte liegt, dessen Coordinaten a, b, c sind.

13. §. Wir wollen nun die Fläche suchen, welche durch die nicht rotirende Bewegung einer zweyten Fläche entsteht, die sich längs einer Curve bewegt, welche Curve selbst wieder auf einer dritten Fläche verzeichnet ist.

Sey $z = F(xy)$ die Gleichung der zweyten beweglichen Fläche, und $\varphi(xyz) = o$ die der dritten Fläche.

In irgend einem Puncte der gesuchten ersten oder der einhüllenden Fläche, dessen Coordinaten x' y' z' sind, sey zu dieser Fläche eine tangirende Ebene gezogen. Eben so wollen wir in irgend einem Puncte der eingehüllten zweyten Fläche, in der ersten ursprünglichen Lage dieser zweyten Fläche, ebenfalls eine tangirende Ebene zu dieser zweyten Fläche, und zwar so ziehen, dass beyde tangirenden Ebenen einander parallel seyen. Diess vorausgesetzt, wird, da alle rotirende Bewegung der zweyten Fläche ausgeschlossen seyn soll, der Berührungspunct der zweyten tangirenden Ebene

mit dem ersten, dessen Coordinaten $x' y' z'$ sind, zusammen fallen, wenn die zweyte Fläche in ihrer Bewegung bis zu jenem zweyten Puncte fortgerückt seyn wird.

Es seyen $F'.(x\,y)$ und $F''.(x\,y)$ die Coefficienten von dx und dy in dem Differential der Gleichung $z = F(x\,y)$, so dass man hat

$$dz = dx\,.\,F'.(x\,y) + dy\,.\,F''.(x\,y).$$

Ferner sey überhaupt

$$p = \left(\frac{dz}{dx}\right) \text{ und } q = \left(\frac{dz}{dy}\right).$$

Da nach dem Vorhergehenden die beyden tangirenden Ebenen parallel sind, so hat man

$$\left.\begin{array}{l} p = F'.(x'\,y') \\ q = F''.(x'\,y') \end{array}\right\} \text{(I)}.$$

Da ferner die drey Grössen $x - x'$, $y - y'$, $z - z'$ nach der Ordnung gleich den drey Coordinaten irgend eines Punctes der dritten Fläche $\varphi(x\,y\,z) = o$ seyn müssen, so ist auch

$$\varphi(x - x', y - y', z - z') = o \ldots \text{(II)}.$$

Und da endlich die einhüllende Fläche $z = F(x\,y)$ auch durch den Punct $x' y' z'$ geht, so hat man

$$z' = F(x'\,y') \ldots\ldots \text{III}.$$

Diese vier Gleichungen I, II, III müssen zugleich für alle Puncte der einhüllenden Fläche Statt haben, welches auch die Werthe der Grössen $x' y' z'$ sind, also wird das Resultat der Elimination von $x' y' z'$ aus diesen vier Gleichungen eine neue Gleichung in $x\,y\,z$ und $p\,q$ geben, welche die gesuchte Gleichung der einhüllenden Fläche seyn wird.

Ex. Der Mittelpunct einer Kugel des Halbmessers r soll sich auf einer Curve bewegen, die auf einer Rotationsfläche verzeichnet ist.

Ist die Achse der z zugleich die Rotationsachse dieser Fläche, so ist ihre Gleichung

$$z = \psi(x^2 + y^2).$$

Die Gleichung der Kugel aber, in ihrer ersten ursprünglichen Lage, ist

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

also sind die vier Gleichungen I, II, III,

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = r^2$$

$$p = -\frac{x'}{z'}$$

$$q = -\frac{y'}{z'}$$

$$z - z' = \psi[(x - x')^2 + (y - y')^2].$$

Eliminirt man aus ihnen die Grössen $x'\,y'\,z'$, so erhält man für die gesuchte einhüllende Fläche

$$z - \omega = \psi[(x - p\,\omega)^2 + (y + q\,\omega)^2]$$

wo $\omega = \frac{r}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$ ist.

I. Wäre die leitende Curve auf einer Ebene, z. B. auf der Ebene der $x\,y$ verzeichnet, so würden jene beyden Berührungspuncte der parallelen tangirenden Ebenen offenbar in gleicher Erhöhung über der Ebene der $x\,y$ stehen, und man würde $z = z'$ haben. Verbindet man diese Gleichung mit den drey Gleichungen I und III, so wird das Resultat der Elimination von $x'\,y'\,z'$ wieder die gesuchte Gleichung der einhüllenden Fläche seyn.

Ex. Bewegt sich der Mittelpunct einer Kugel des Halbmessers a auf einer horizontalen Curve, so sind diese vier Gleichungen

$$r^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2,\ p = -\frac{x'}{y'},\ q = -\frac{y'}{z'} \text{ und } z = z',$$

also ist die Gleichung der einhüllenden Fläche

$$\frac{r^2}{z^2} = p^2 + q^2 + 1.$$

In der That ist, wenn $y = \varphi x$ die Gleichung der horizontalen Curve bezeichnet, die Gleichung der Kugel in irgend einer ihrer Lagen

$$(x - a)^2 + (y - \varphi a)^2 + z^2 = a^2 \dots (1).$$

Differentiirt man diese Gleichung partiel, so ist

$$x - a + p z = o$$
$$y - \varphi a + q z = o,$$

und die Elimination von a und φ a aus den drey letzten Gleichungen gibt, wie zuvor,

$$p^2 + q^2 + 1 = \frac{a^2}{z^2}$$

für die Differentialgleichung der gesuchten einhüllenden Fläche, deren endliche Gleichung nach dem Vorhergehenden das Resultat der Elimination der Grösse a aus der Gleichung (1) und ihrem Differential in Beziehung auf die Grösse a ist.

14. §. Wir wollen nun die Fläche suchen, welche alle Kugeln desselben Halbmessers berührt, während der Mittelpunct der Kugel sich in einer gegebenen Fläche bewegt.

Sind x y z die Coordinaten der gesuchten Fläche, und α β γ die analogen Coordinaten der gegebenen Fläche, deren Gleichung $\gamma = \varphi(\alpha, \beta)$ seyn soll, so hat man für die Gleichung der beweglichen Kugel, deren Halbmesser R ist.

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 - R^2 = o \ldots . (I).$$

Da aber, wie in jeder Fläche, die Grössen α und β von einander unabhängig sind, so sind die Differentialgleichungen des vorhergehenden Ausdruckes in Beziehung auf α, β, γ,

$$\left.\begin{aligned} x - \alpha + (z - \gamma)\left(\frac{d\gamma}{d\alpha}\right) = o \\ y - \beta + (z - \gamma)\left(\frac{d\gamma}{d\beta}\right) = o \end{aligned}\right\} \text{II.}$$

Die zwey letzten Gleichungen geben die Werthe von α und β als Functionen von x y z, weil γ, also auch $\left(\frac{d\gamma}{d\alpha}\right)$, $\left(\frac{d\gamma}{d\beta}\right)$ durch die Gleichung $\gamma = \varphi(\alpha, \beta)$ als Functionen von α und β gegeben sind. Substituirt man daher diese Werthe von α und β in der Gleichung (I)

so erhält man die Gleichung der gesuchten Fläche in x, y, z.

I. Differentiirt man aber die Gleichung I in Beziehung auf x y z, so erhält man

$$(x-\alpha)+(z-\gamma)\left(\frac{dz}{dx}\right)=0$$

$$(y-\beta)+(z-\gamma)\left(\frac{dz}{dy}\right)=0,$$

und diese beyden Ausdrücke mit den Gleichungen II verglichen, geben sofort

$$\left(\frac{d\gamma}{d\alpha}\right)=\left(\frac{dz}{dx}\right) \text{ und } \left(\frac{d\gamma}{d\beta}\right)=\left(\frac{dz}{dy}\right),$$

das heisst, die tangirenden Ebenen der gegebenen Fläche in dem Puncte $\alpha\ \beta\ \gamma$, und der gesuchten Fläche in dem Puncte x y z sind einander parallel, also sind auch beyde Flächen selbst, in diesen beyden Puncten, einander parallel. Man hat daher diese beyden Flächen *parallele Flächen* genannt. Vergleiche Capitel VI. §. 6.

II. Sucht man aus den drey Gleichungen I und II die Werthe von x, y, z, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} x&=\alpha-\lambda R\left(\frac{d\gamma}{d\alpha}\right)\\ y&=\beta-\lambda R\left(\frac{d\gamma}{d\beta}\right)\\ z&=\gamma+\lambda R \end{aligned}\right\}(1),$$

$$\text{wo } \lambda=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{d\gamma}{d\alpha}\right)^2+\left(\frac{d\gamma}{d\beta}\right)^2}} \text{ ist.}$$

Sind aber x y z die veränderlichen Coordinaten der Normale der gegebenen Fläche, so sind die Gleichungen dieser Normale

$$x-\alpha+(z-\gamma).\left(\frac{d\gamma}{d\alpha}\right)=0$$

$$y-\beta+(z-\gamma).\left(\frac{d\gamma}{d\beta}\right)=0.$$

Substituirt man in diesen Gleichungen die Werthe von α, β und γ aus den Gleichungen (1), so erhält man zwey identische Gleichungen, zum Beweise, dass die Normale der gegebenen Fläche in dem Puncte $\alpha\,\beta\,\gamma$ zugleich normal auf der gesuchten parallelen Fläche in dem Punct x y z steht. Die Distanz beyder Puncte aber ist

$$\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2}$$

oder gleich R, wie Capitel VI. §. 6.

III. Wenn die gegebene Fläche bloss durch eine Differentialgleichung der ersten Ordnung

$$\varphi\left[\alpha, \beta, \gamma, \left(\frac{d\,\gamma}{d\,\alpha}\right), \left(\frac{d\,\gamma}{d\,\beta}\right)\right]$$

ausgedrückt ist, so hat man aus dem Vorhergehenden

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=R^2$$

$$x-\alpha+(z-\gamma)\left(\frac{d\,\gamma}{d\,\alpha}\right)=0$$

$$y-\beta+(z-\gamma)\left(\frac{d\,\gamma}{d\,\beta}\right)=0$$

und überdiess

$$\left(\frac{d\,\gamma}{d\,\alpha}\right)=\left(\frac{d\,z}{d\,x}\right), \quad \left(\frac{d\,\gamma}{d\,\beta}\right)=\left(\frac{d\,z}{d\,y}\right),$$

und da die letzten fünf Gleichungen ganz unabhängig von der Natur der gegebenen Fläche sind, so wird man aus allen sechs Gleichungen die fünf Grössen α, β, γ, $\left(\frac{d\gamma}{d\alpha}\right)$ und $\left(\frac{d\gamma}{d\beta}\right)$ eliminiren, und das Resultat der Elimination wird die Gleichung der gesuchten *parallelen* Fläche in x, y, z, $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ und $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ seyn.

15. §. Wenn man auf der gegebenen Oberfläche eine Curve verzeichnet, und durch alle Puncte dieser Curve normale gerade Linien auf die gegebene Fläche zieht, so werden diese Normalen die parallele Fläche jener gegebenen Fläche in einer anderen Curve treffen,

welche wir die *correspondirende* Curve nennen wollen.

Es ist leicht, die Gleichung dieser correspondirenden Curve zu finden, wenn die Gleichung der gegebenen Fläche und die Gleichung einer der Projectionen der auf der gegebenen Fläche verzeichneten Curve bekannt ist.

Denn sind wieder $\alpha\ \beta\ \gamma$ die Coordinaten eines Punctes der gegebenen Fläche, also auch die der in dieser Flächen verzeichneten Curve, und sind x y z die drey Coordinaten des jenem Puncte entsprechenden Punctes der correspondirenden Curve, und R die Distanz der beyden parallelen Flächen, so hat man nach dem Vorhergehenden

$$x = \alpha - \lambda R \left(\frac{d\gamma}{d\alpha}\right)$$

$$y = \beta - \lambda R \left(\frac{d\gamma}{d\beta}\right)$$

$$z = \gamma + \lambda R.$$

Substituirt man in diesen Ausdrücken die Werthe von β und γ aus der bekannten Gleichung der gegebenen Fläche, und aus der Gleichung der Projection der gegebenen Curve, so erhält man diese Werthe von x y z bloss in α ausgedrückt. Eliminirt man daher diese Grösse α aus den drey vorhergehenden Gleichungen, so erhält man die zwey Gleichungen in x y z für die gesuchte correspondirende Curve.

I. Man kann also von jedem ersten Puncte einer gegebenen Fläche in jeder willkührlichen Richtung eine Curve auf dieser Fläche ziehen, und von dieser Curve ihre correspondirende Curve in der parallelen Fläche finden. Allein diese correspondirenden Curven werden nicht immer auch *parallele Curven* seyn. Wir wollen daher zum Beschlusse dieser Betrachtungen, unter allen Curven, die durch einen gegebenen Punct der ersten Fläche in dieser Fläche gezogen werden können,

diejenigen suchen, deren correspondirende, zugleich parallele Curven mit der gegebenen Curve sind, das heisst, diejenigen zwey Curven, welche die Eigenschaft haben, dass die Tangente der einen in dem Puncte $\alpha\ \beta\ \gamma$ der Tangente der andern in dem Puncte x y z parallel ist.

Wir haben bereits gefunden, dass in zwey parallelen Flächen die tangirenden Ebenen der einen Fläche in dem Puncte $\alpha\ \beta\ \gamma$, und der andern in dem Puncte x y z einander parallel sind, woraus folgt, dass die geradlinichten Tangenten der durch jene zwey Puncte gehenden Curven einander parallel seyn werden, wenn auch nur *eine* der Projectionen dieser Tangenten auf eine der drey coordinirten Ebenen mit der andern parallel ist. Wählt man dazu z. B. die coordinirte Ebene der α, β, oder der x, y, so werden also die Tangenten parallel seyn, wenn man hat

$$\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)=\left(\frac{dy}{dx}\right),$$

oder was dasselbe ist

$$\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)=\frac{\left(\frac{dy}{d\alpha}\right)}{\left(\frac{dx}{d\alpha}\right)}\ldots.(2).$$

Es ist aber, nach dem Vorhergehenden,

$$x=\alpha-\lambda R\left(\frac{d\gamma}{d\alpha}\right)$$

$$y=\beta-\lambda R\left(\frac{d\gamma}{d\beta}\right).$$

Differentiirt man diese Gleichungen und behält man die Bezeichnung der Grössen p q r s t des Capitels IV. §. 1. bey,

$$p=\left(\frac{d\gamma}{d\alpha}\right),\ q=\left(\frac{d\gamma}{d\beta}\right),\ r=\left(\frac{d^2\gamma}{d\alpha^2}\right),$$

$$s=\left(\frac{d^2\gamma}{d\alpha\, d\beta}\right),\ t=\left(\frac{d^2\gamma}{d\beta^2}\right),$$

so erhält man

$$\left(\frac{dx}{d\alpha}\right) = 1 - \lambda R r + \lambda^3 . R p (p r + q s)$$
$$+ \lambda^3 R p (q t + p s) \left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right) - \lambda R s \left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right),$$

$$\left(\frac{dy}{d\alpha}\right) = - \lambda R s + \lambda^3 . R q (p r q s)$$
$$+ (1 - \lambda R t + \lambda^3 R q (q t + p s)).$$

Substituirt man diese Werthe von $\left(\frac{dx}{d\alpha}\right)$ und $\left(\frac{dy}{d\alpha}\right)$ in der Gleichung (2), so erhält man, wenn man den Werth von λ wieder herstellt,

$$[(1+q^2)s-pqt].\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)^2 - [(1+p^2)t-(1+q^2)r]\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)$$
$$-(1+p^2)s+pqr=0,$$

und diese Gleichung gibt den Werth von $\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)$, das heisst, die Richtung, in welcher man von dem ersten Puncte der gegebenen Fläche ausgehen muss, damit die correspondirende Curve zugleich eine parallele Curve werde. Da aber diese Gleichung mit der Gleichung IV des Capitels IV. §. 4. identisch ist, so sind diejenigen Curven einer gegebenen Fläche, deren correspondirende Curven zugleich zu den ersten parallele Curven sind, dieselben, welche wir oben für die Curven der grössten und kleinsten Krümmung der gegebenen Fläche gefunden haben.

Achtes Capitel.

Cylindrische, conische und Rotationsflächen.

Cylindrische Flächen.

1. §. Ein Cylinder überhaupt entsteht durch die Bewegung einer geraden Linie, die während ihrer Bewegung einer andern unbeweglichen geraden Linie parallel bleibt. Man suche die allgemeine Gleichung der cylindrischen Flächen.

Eine unterscheidende Eigenschaft dieser Flächen wird, nach der gegebenen Erklärung derselben, die seyn, dass die tangirende Ebene derselben in jedem Puncte parallel mit der beweglichen, den Cylinder erzeugenden Geraden seyn wird.

Seyen also

$$x' = az'$$
$$y' = bz'$$

die gegebenen Gleichungen einer Geraden, welche durch den Anfangspunct der Coordinaten geht, und parallel mit der erzeugenden Geraden ist. Sind dann x, y, z die Coordinaten irgend eines Punctes des Cylinders, so ist (Capitel IV. §. 2.) die Gleichung der den Cylinder in diesem Puncte berührenden Ebene

$$z' - z = (x' - x)\left(\frac{dz}{dx}\right) + (y' - y)\left(\frac{dz}{dy}\right).$$

Damit aber diese berührende Ebene mit der erzeugenden Linie, das heisst, mit der Geraden, deren Gleichungen gegeben werden, parallel sey, wird man ausdrücken, dass diese Ebene parallel mit sich selbst durch den Anfang der Coordinaten geführt, wo ihre Gleichung wird

$$z' = x'\left(\frac{dz}{dx}\right) + y'\left(\frac{dz}{dy}\right)$$

mit jener Geraden zusammen falle. Substituirt man daher in der letzten Gleichung die Werthe von x' und y' aus den beyden ersten, so hat man

$$1 = a\left(\frac{dz}{dx}\right) + b\left(\frac{dz}{dy}\right) \ldots\ldots I,$$

und das ist die allgemeine Gleichung aller Cylinder, welches auch die Curve seyn mag, die die Bewegung der erzeugenden Geraden leitet, eine Curve, die ganz willkührlich nach irgend einem, oder auch nach gar keinem Gesetze, entstanden seyn kann.

Wenn daher eine gegebene Gleichung sich auf die Form (I) bringen lässt, so gehört die gegebene Gleichung für eine cylindrische Fläche. So gibt die Gleichung

$$A^2 (y - b z)^2 + B^2 (x - a z)^2 = A^2 B^2$$

folgende Werthe der partiellen Differentialien

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{B^2 (x - a z)}{A^2 b (y - b z) + B^2 a (x - a z)}$$

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = \frac{A^2 (y - b z)}{A^2 b (y - b z) + B^2 a (x - a z)}$$

und da diese Werthe der Gleichung (I) Genüge thun, so gehört die gegebene Gleichung für einen Cylinder. Die Curve, welche die Bewegung der erzeugenden Geraden leitet, ist eine Ellipse in der Ebene der $x\,y$, und die Gleichung dieser Ellipse ist

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1.$$

2. §. Wenn man die Gleichung (I) nach den bekannten Vorschriften integrirt, so erhält man

$$y - b z = \varphi (x - a z) \ldots (II),$$

wo φ eine willkührliche Function bezeichnet. Diese Gleichung lässt sich auf folgende merkwürdige Art unmittelbar finden.

Wenn wir die alten Bezeichnungen beybehalten, so sind die Gleichungen der erzeugenden Geraden in irgend einer ihrer Lagen

$$x = az + \alpha$$
$$y = bz + \beta.$$

In diesen Gleichungen sind die Grössen a und b constant; die Grössen α und β aber sind nur für eine und dieselbe Lage der erzeugenden Linie constant, während sie für eine veränderte Lage dieser Linie auch veränderte Werthe annehmen. Wenn nähmlich irgend ein Punct der cylinderischen Fläche seine Lage so ändert, dass er dieselbe erzeugende Gerade nicht verlässt, so sind die Grössen α, β, das heisst, die Grössen $x - az$, $y - bz$ beyde zugleich constant; wenn aber jener Punct seine Lage so ändert, dass er von einer erzeugenden Geraden zu einer andern übergeht, so sind diese beyden Grössen zugleich veränderlich.

Da also diese Grössen $x - az$, $y - bz$ beyde zugleich constant und beyde zugleich veränderlich sind, so müssen sie, jede eine Function der andern seyn, dass heisst, es muss seyn

$$y - bz = \varphi(x - az),$$

wie zuvor.

Differentiirt man diese Gleichung partiell, so ist

$$b\left(\frac{dz}{dx}\right) = -\varphi'(x - az) + a\left(\frac{dz}{dx}\right)\varphi'(x - az)$$
$$1 - b\left(\frac{dz}{dy}\right) = -a\left(\frac{dz}{dy}\right)\varphi'(x - az),$$

und eliminirt man aus diesen beyden Ausdrücken die Grösse $\varphi'(x - az)$, so hat man

$$1 = a\left(\frac{dz}{dx}\right) + b\left(\frac{dz}{dy}\right),$$

wie zuvor.

Der Kürze wegen, wollen wir im Folgenden die Linie, durch deren Bewegung die Fläche entsteht, die *erzeugende*, und jene, durch welche die Lage der erzeugenden während ihrer Bewegung bestimmt wird, die *leitende* Linie nennen.

3. §. Wenn man die Gleichungen der erzeugenden, und die der leitenden Linie kennt, die cylindrische Fläche finden, welche durch diese Bewegung der erzeugenden Linie entsteht.

Die Auflösung dieser Aufgabe besteht offenbar in der Bestimmung der Function φ (Gleich. II) der allgemeinen Gleichung der Cylinder, damit diese allgemeine Gleichung jene des besondern Cylinders werde, welchen man hier betrachtet.

Seyen also $U = o$, und $V = o$ die Gleichungen der leitenden Curve, wo U und V eine Function von x y und z ist. Seyen eben so die Gleichungen der erzeugenden Geraden $x - az = \alpha$, $y - bx = \varphi\alpha$.

Da die erzeugende Linie in allen ihren Lagen durch die leitende Curve gehen muss, so werden diese vier Gleichungen

$$U = o, \quad V = o, \quad x - az = \alpha, \quad y - bz = \varphi\alpha,$$

alle zugleich Statt haben, welches auch der Werth von der Grösse α seyn mag. Wenn man daher aus diesen vier Gleichungen, die drey Grössen x y z eliminirt, so wird man eine Gleichung zwischen den Grössen α und $\varphi\alpha$ erhalten, wodurch die gesuchte Form der Function φ bestimmt wird.

Ex. Sey die leitende Curve ein Kreis in der Ebene der x y, dessen Halbmesser R, und die Coordinaten des Mittelpunctes desselben A und B, so sind die Gleichungen der leitenden Curve

$$z = o$$
$$(x - A)^2 + (y - B)^2 = R^2$$

Verbindet man damit die zwey Gleichungen der erzeugenden Linie

$$x - az = \alpha$$
$$y - bz = \varphi\alpha,$$

und eliminirt man aus diesen vier Gleichungen die drey Grössen x, y, z, so erhält man

$$(\varphi\alpha - B)^2 + (\alpha - A)^3 = R^2,$$

wodurch die gesuchte Form der Function φ bestimmt wird.

Substituirt man in dem letzten Ausdrucke für α und $\varphi\,\alpha$ ihre allgemeinen Werthe $x - az$, $y - bz$, so erhält man

$$(y - bz - B)^2 + (x - az - A)^2 = R^2,$$

welches die gesuchte Gleichung des Cylinders ist.

Ist $A = B = o$, so geht die Achse des Cylinders durch den Anfangspunct der Coordinaten. Ist $a = o$, so ist die Achse parallel mit yz; ist $b = o$, so ist die Achse parallel mit xz; ist endlich $a = b = o$, so ist die Achse des Cylinders zugleich die Achse der z.

4. §. Die erzeugende Curve und irgend eine Fläche sey gegeben. Man suche die Gleichung des Cylinders, welcher die Fläche ringsum berührt.

Die gegebene Fläche und die gesuchte cylindrische Fläche werden sich in irgend einer Curve berühren. Unsere Aufgabe wird daher auf die des §. 3 zurückgeführt seyn, so bald wir die letzte Curve der Berührung bestimmt haben, da diese Curve nichts anders, als eine leitende Curve des Cylinders seyn kann.

Sey also $U = o$, die Gleichung der gegebenen Fläche. Sucht man aus ihr die Werthe von $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ und $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ und substituirt man diese Werthe in die allgemeine Gleichung (I) des Cylinders, so erhält man eine Gleichung, die wir $V = o$ nennen wollen, und die für die gesuchte Curve der Berührung gehören wird. Da aber diese Curve zugleich ganz in der gegebenen Fläche liegen wird, so werden die gesuchten zwey Gleichungen dieser Curve der Berührung, d. h. die zwey Gleichungen der leitenden Curve seyn

$$U = o, V = o,$$

welche mit den beyden Gleichungen der erzeugenden Linie

$$x - az = \alpha,\ y - bz = \varphi\,\alpha$$

verbunden, wie in §. 3 die gesuchte Gleichung des Cylinders geben werden.

Ex. Sey die gegebene Fläche ein Ellipsoid, dessen Gleichung

$$U = o = \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} - 1, \text{ also auch}$$

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = -\frac{C^2 x}{A^2 z}, \quad \left(\frac{dz}{dy}\right) = -\frac{C^2 y}{B^2 z}.$$

Die erzeugende Gerade soll in einer der yz parallelen Ebene liegen, so werden ihre beyden gegebenen Gleichungen seyn

$$x = \alpha$$

$$y = bz + \varphi\alpha.$$

Die allgemeine Gleichung (I) des Cylinders aber ist

$$1 = b\left(\frac{dz}{dy}\right), \text{ oder}$$

$$V = o = 1 + \frac{bC^2 y}{B^2 z}.$$

Man hat daher folgende vier Gleichungen

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1$$

$$bC^2 y + B^2 z = o$$

$$x = \alpha$$

$$y = bz + \varphi\alpha.$$

Eliminirt man aus ihnen die Grössen x, y, z, so erhält man

$$\varphi\alpha = \sqrt{\frac{(A^2 - \alpha^2)(B^2 + b^2 C^2)}{A^2}},$$

also die Gleichung des gesuchten Cylinders, welcher das gegebene Ellipsoid umschliesst,

$$(y - bz)^2 = \frac{(A^2 - x)^2 (B^2 + b^2 C^2)}{A^2}.$$

5. §. Die oben gegebene Gleichung des Cylinders

$$1 = a\left(\frac{dz}{dx}\right) + b\left(\frac{dz}{dy}\right)$$

enthält noch die Grössen a und b, welche die Lage der erzeugenden Geraden bestimmen. Wollte man aber

die cylindrische Fläche von der Lage der erzeugenden Geraden ganz unabhängig machen, so würde man die vorhergehende Gleichung partiell differentiiren, wodurch man erhält

$$o = a\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + b\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)$$

$$o = a\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right) + b\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right).$$

Eliminirt man dann aus diesen drey Gleichungen die zwey Grössen a und b, so erhält man,

$$\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)^2 = \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)$$

und diese Gleichung drückt eine cylindrische Fläche in dem allgemeinsten Sinne des Wortes aus, nähmlich eine Fläche, welche durch die Bewegung einer erzeugenden Geraden entsteht, die immer Tangente zu einer gegebenen Curve ist, wie wir weiter unten sehen werden.

Conische Flächen.

6. §. Eine conische Fläche wird durch die Bewegung einer geraden Linie erzeugt, die immer durch einen gegebenen festen Punct, und durch eine gegebene Curve, die leitende Curve, geht.

Daraus folgt die unterscheidende Eigenschaft dieser Flächen, dass ihre tangirende Ebene immer durch den gegebenen Punct gehen müsse. Sind also a, b, c die Coordinaten des gegebenen Punctes, und x, y, z die eines andern willkührlichen Punctes der conischen Fläche, so ist die Gleichung der Ebene, welche die conische Fläche in dem Puncte x y z berührt,

$$z' - z = (x' - x)\left(\frac{dz}{dx}\right) + (y' - y)\left(\frac{dz}{dy}\right)$$

und diese berührende Ebene wird durch den gegebenen Punct gehen, wenn in der letzten Gleichung, indem man x = a und y = b setzt, z = c wird, das heisst,

die allgemeine Gleichung der conischen Flächen wird seyn

$$c - z = (a - x)\left(\frac{dz}{dx}\right) + (b - y)\left(\frac{dz}{dy}\right) \ldots \text{(III)}$$

Da ferner die erzeugende Gerade ebenfalls immer durch den Punct gehen muss, dessen Coordinaten a, b, c sind, so sind die Gleichungen der erzeugenden Geraden

$$x - a = \alpha (z - c)$$
$$y - b = \beta (z - c)$$

und in diesen Gleichungen sind a und b unveränderliche Grössen; α und β aber sind (für dieselbe erzeugende Linie) zugleich constant, und (wenn man von einer Lage der erzeugenden Linie zur andern übergeht) zugleich veränderlich, d. h. die Grössen α und β sind Functionen eine von der andern, also ist:

$$\beta = \varphi \alpha \text{ oder}$$
$$\frac{y - b}{z - c} = \varphi \frac{x - a}{z - c} \ldots\ldots \text{(IV)},$$

und dieser Ausdruck ist ebenfalls eine allgemeine Gleichung der conischen Flächen. Er ist das vollständige Integral der Gleichung (III).

7. §. Wenn die Gleichungen des festen Punctes und die der leitenden Curve gegeben sind, die Gleichung der conischen Fläche finden, welche durch die Bewegung einer Geraden entsteht, die immer durch den festen Punct und durch die leitende Curve geht.

Sind $U = 0$ und $V = 0$ die Gleichungen der leitenden Curve, so wird man aus ihnen und aus den beyden Gleichungen

$$\frac{x - a}{z - c} = \alpha, \quad \frac{y - b}{z - c} = \varphi \alpha$$

der erzeugenden Geraden die drey Grössen x, y, z eliminiren, und dadurch die Form der Function φ bestimmen.

Ex. Die erzeugende Curve sey ein Kreis des Halbmessers r. Die Ebene dieses Kreises sey parallel mit

der Ebene der x y in der senkrechten Entfernung m von dieser Ebene, und die Coordinaten des Mittelpunctes dieses Kreises seyen A und C, so sind die Gleichungen derselben

$$z = m$$

$$(x - A)^2 + (y - B)^2 = r^2.$$

Der feste Punct liege in der Ebene der x y, also ist c = o und die Gleichungen der erzeugenden Geraden werden seyn

$$\frac{x-a}{z} = \alpha$$

$$\frac{y-b}{z} = \varphi\,\alpha.$$

Eliminirt man aus diesen vier Gleichungen die Grössen x, y, z, so erhält man

$$(m\alpha + a - A)^2 + (m\varphi a + b - B)^2 = r^2,$$

also ist die Gleichung des gesuchten Kegels

$$[(x-a)\,m + (a-A)\,z]^2 + [(y-b)\,m + (b-B)\,z]^2 = r^2 z^2.$$

Ist a = A und b = B, so ist die Achse des Kegels, welche durch den festen Punct und durch den Mittelpunct des Kreises geht, parallel mit der Achse der z, und die Gleichung des Kegels wird

$$(x - A)^2 + (y - B)^2 = \frac{r^2}{m^2}\cdot z^2,$$

wo $\frac{r}{m}$ die Tangente der Seitenlinie des Kegels mit der Achse desselben ist.

8. §. Der feste Punct und irgend eine Fläche ist gegeben. Man suche den Kegel, welcher die gegebene Fläche ringsum berührt.

Ist wie §. 4 U = o die Gleichung der gegebenen Fläche, so sucht man aus ihr die Werthe von $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ und $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ und substituirt sie in der Gleichung (III), wodurch man eine Gleichung erhalten wird, die wir V = o nennen wollen. Eliminirt man dann aus diesen vier Gleichungen

$$U = o,\ V = o,\ \text{und}\ \frac{x-a}{z-c} = \alpha,\ \frac{y-b}{z-c} = \varphi\,\alpha,$$

die Grössen x y z, so erhält man die Gleichungen des gesuchten Kegels.

Ex. Sey die gegebene Fläche die einer Kugel des Halbmessers r, so hat man

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2\text{, also}$$

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = -\frac{x}{z} \text{ und } \left(\frac{dz}{dy}\right) = -\frac{y}{z}.$$

Ist der feste Punct in der Achse der z, so ist a = b = o und die Gleichung (III)

$$z - c = x\left(\frac{dz}{dx}\right) + y\left(\frac{dz}{dy}\right)\text{, oder}$$

$$(z - c)\, z + x^2 + y^2 = o.$$

Eliminirt man aus der ersten und letzten dieser Gleichungen die Grösse z, so erhält man

$$x^2 + y^2 = \frac{r^2}{c^2}(c^2 - r^2)$$

und eliminirt man aus ihnen die Grössen x oder y, so erhält man

$$z = \frac{r^2}{c},$$

woraus folgt, dass die Curve, in welcher die Kugel den Kegel berührt, ein mit der Ebene der x y paralleler Kreis in der Höhe $\frac{r^2}{c}$ über diese Ebene, und von dem Halbmesser $\frac{r}{c}\sqrt{c^2 - r^2}$ ist.

Verbindet man aber dieselben beyden Gleichungen mit den folgenden

$$\frac{x}{z - c} = \alpha, \quad \frac{y}{z - c} = \varphi\,\alpha,$$

so erhält man

$$(\varphi\,\alpha)^2 + \alpha^2 = \frac{r^2}{c^2 - r^2},$$

und für die Gleichung des gesuchten umschliessenden Kegels

$$x^2 + y^2 = \frac{r^2\,(z - c)^2}{c^2 - r^2}.$$

Ist der feste Punct ein leuchtender Punct, so ist die Curve, in welcher sich die gegebene Fläche und der Kegel berührt, (welcher Curve Gleichungen nach dem Vorhergehenden $U = o$ und $V = o$ sind), diejenige, welche auf der gegebenen Fläche den beleuchteten Theil von dem unbeleuchteten trennt, oder die Berührungscurve ist die Gränze des Lichtes und des Schattens auf der gegebenen Fläche.

Ist aber der feste Punct das Auge, welches die gegebene Fläche betrachtet, so ist jene Berührungscurve der scheinbare Umfang, unter welchem jene Fläche dem Auge erscheint.

Wenn man endlich aus der allgemeinen Gleichung einer Fläche der zweyten Ordnung die Werthe von

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) \text{ und } \left(\frac{dz}{dy}\right)$$

sucht, und sie in der Gleichung

$$c - z = (a - x)\left(\frac{dz}{dx}\right) + (b - y)\left(\frac{dz}{dy}\right)$$

substituirt, so erhält man eine Gleichung der Form

$$Ax + By + Cz + D = o,$$

woraus folgt, dass für jede Fläche der zweyten Ordnung die Berührungscurve derselben mit einem der Fläche umschriebenen Kegel eine *ebene* Curve ist.

9. §. Differentiirt man die von a b c noch abhängige Gleichung III partiell, so erhält man

$$o = (a - x)\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + (b - y)\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right),$$

$$o = (a - x)\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right) + (b - y)\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right),$$

und wenn man aus diesen drey Gleichungen die Grössen

$$\frac{a - x}{c - z} \text{ und } \frac{b - y}{c - z}$$

eliminirt, so erhält man

$$\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)^2 = \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)$$

wie in §. 5, eine von a, b, c oder von der Lage des

festen Punctes unabhängige Gleichung, auf welche wir später zurückkommen werden.

Rotationsflächen.

10. §. Eine Rotationsfläche wird durch die Bewegung einer Curve um eine feste Gerade (die Achse) erzeugt.

Diese Flächen haben die ihnen ausschliessend zukommende Eigenschaft, dass ihre Normalen alle durch die Achse gehen. Allein die Gleichungen der Normale sind für jeden Punct der Fläche, dessen Coordinaten x, y, z (Cap. IV. §. 3) sind,

$$x' - x + (z' - z)\left(\frac{dz}{dx}\right) = o$$

$$y' - y + (z' - z)\left(\frac{dz}{dy}\right) = o.$$

Sind daher die gegebenen Gleichungen der Achse

$$x' = Az' + a$$
$$y' = Bz' + b,$$

so werden diese vier Gleichungen zusammen bestehen, welches auch die Werthe von $x'\, y'\, z'$ sind. Eliminirt man daher aus ihnen die Grössen $x'\, y'\, z'$, so erhält man

$$(b - y + Bz)\left(\frac{dz}{dx}\right) - (a - x + Az)\left(\frac{dz}{dy}\right)$$
$$+ A(b - y) - B(a - x) = o \ldots (V),$$

und diess ist die allgemeine Gleichung aller Flächen, die durch Rotation entstanden sind.

Eine Ebene senkrecht auf die Achse der Rotation, deren Gleichung also

$$Ax + By + z = \alpha$$

ist, wird unsere Fläche immer in einem Kreise schneiden. Eine Kugel aber, deren Mittelpunct in dem Puncte ist, in welchem die Achse die Ebene der xy schneidet, und deren Halbmesser β ist, wird zur Gleichung haben

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + z^2 = \beta^2,$$

und auch diese Kugel wird unsere Fläche immer in einem Kreise schneiden. Wenn man von einem Puncte der Peripherie in diesem Kreise zu einem andern Puncte übergeht, der *in demselben* Kreise liegt, so werden die Grössen α und β^2 beyde constant bleiben, wenn man aber vom ersten Puncte zu einem andern Puncte unserer Fläche übergeht, der *nicht in dem ersten* Kreise liegt, so werden die Grössen α und β^2 beyde veränderlich seyn, woraus folgt, dass von diesen beyden Grössen jede eine Function der andern ist, und dass man hat:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+z=\varphi(Ax+By+z)\ldots\ldots(VI),$$

und auch dieser Ausdruck ist eine allgemeine Gleichung aller Rotationsflächen. Er ist das vollständige Integral der Gleichung (V).

Ist die Achse der Rotation in der Achse der z, so verschwinden die Grössen A, B und a, b, und man hat

$$x\left(\frac{dz}{dy}\right)-y\left(\frac{dz}{dx}\right)=0$$

und

$$x^2+y^2=\varphi z,\text{ oder}$$

$$z=F.(z^2+y^2),$$

wo φ und F willkührliche Functionen bezeichnen.

I. Die Gleichungen der Flächen mit partiellen Differentialien, welche wir in diesem Capitel erhalten haben, sind von einer viel grösseren Allgemeinheit, als die mit den gewöhnlichen Differentialien, wie die Integralien jener Gleichungen zeigen, die ganz willkührliche Functionen von x, y und z enthalten, während die Integralien der gewöhnlichen Differentialgleichungen nur willkührliche *Constanten* geben.

Überhaupt gehört eine endliche Gleichung zwischen drey veränderlichen Grössen x, y, z immer zu einer Fläche, und zwar für eine *einzige bestimmte* Fläche, weil, wenn zwey dieser Coordinaten gegeben sind, dadurch die dritte derselben ebenfalls bestimmt ist. So ist z. B.

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

die Gleichung einer Kugel, deren Halbmesser R, und deren Mittelpunct der Anfang der Coordinaten ist.

Eine Gleichung im Gegentheile zwischen drey veränderlichen Grössen x, y, z und ihren *gewöhnlichen* Differentialien gehört für eine unendliche Menge von Flächen, die aber unter einander nur durch den Werth des constanten Parameters verschieden sind, der durch die Differentiation verschwunden ist. So ist das Differential der vorigen Gleichung, oder

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0$$

die Gleichung *aller* Kugeln, deren Mittelpunct der Anfang der Coordinaten ist, während der Halbmesser durch die Gleichung nicht bestimmt wird, also auch alle möglichen Werthe haben kann. Die Gleichung mit gewöhnlichen Differentialien drückt bloss die Gestalt, die Form der Fläche aus, ohne über ihre Grösse etwas zu bestimmen.

Eine Gleichung zwischen *partiellen Differentialien* endlich drückt weder die Grösse, noch selbst die Form der Fläche, sondern nur die Art aus, auf welche die Fläche entstanden ist, ohne etwas über die Natur der sie erzeugenden Curve festzusetzen. So drückt die Gleichung

$$y\left(\frac{dz}{dx}\right) - x\left(\frac{dz}{dy}\right) = 0,$$

deren Integral

$$z = \varphi\,(x^2 + y^2)$$

ist, aus, dass die Fläche durch Rotation um die Achse der z entstand, ohne etwas über die erzeugende Curve zu bestimmen, durch deren Rotation die Fläche entsteht, eine Curve, die ganz willkührlich ist, die selbst discontinuirlich seyn, und einem veränderlichen oder auch gar keinem Gesetze unterworfen seyn kann, wie z. B. eine Curve seyn würde, die man mit freyer Hand ganz auf Geradewohl gezogen hat.

11. §. Ist die Curve gegeben, und die Fläche zu suchen, welche durch die Rotation jener Curve um eine gegebene Achse entsteht, so wird die Auflösung wieder in der Bestimmung der Form der Function φ bestehen, welche der Bedingung der Aufgabe genug thut. Sind also $U = o$ und $V = o$ die Gleichungen der gegebenen Curve, so wird man aus ihnen und aus den beyden folgenden Gleichungen

$$Ax + By + z = \alpha$$
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + z^2 = \varphi\alpha$$

die Grössen x, y, z eliminiren.

Ex. Die gegebene Curve sey eine Ellipse in der Ebene der xz. Der Mittelpunct derselben sey von dem Anfang der Coordinaten um die Grösse $x = h$ entfernt, und die halbe grosse und kleine Achse sey M und N, so sind die Gleichungen der Ellipse

$$y = o$$
$$\frac{(x - h)^2}{M^2} + \frac{z^2}{N^2} = 1.$$

Ist die Rotationsachse zugleich die Achse der z, so hat man

$$z = \alpha$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = \varphi\alpha.$$

Eliminirt man aus diesen vier Gleichungen die Grössen x, y, z, so ist

$$h + \frac{M}{N}\sqrt{N^2 - \alpha^2} = \sqrt{\varphi\alpha - \alpha^2},$$

also die gesuchte Gleichung der Rotationsfläche

$$h + \frac{M}{N}\sqrt{N^2 - z^2} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Ist $h = M$, so hat man

$$MN + M\sqrt{N^2 - z^2} = N.\sqrt{x^2 + y^2}$$

für die Fläche, die durch die Rotation der Ellipse um den Scheitel ihrer grossen Achse entsteht.

Ist $h = o$, so ist

$$\frac{x^2 + y^2}{M^2} + \frac{z^2}{N^2} = 1$$

für die Fläche, welche durch Rotation der Ellipse um ihre kleine Achse entsteht.

Ist endlich $M = N$, so hat man

$$x^2 + y^2 + z^2 = M^2$$

für die Kugel.

I. Ist die Curve eine gerade Linie in der Ebene der xz, so hat man für ihre Gleichungen

$$x = Mz + N, \text{ und } y = o.$$

Ist die Rotationsachse die Achse der z, so ist

$$z = \alpha$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \varphi\alpha,$$

und aus diesen vier Gleichungen folgt

$$(M\alpha + N)^2 + \alpha^2 = \varphi\alpha,$$

also die Gleichung der gesuchten Fläche

$$Mz + N = \sqrt{x^2 + y^2},$$

welches die Gleichung eines Kegels ist. Ist der Scheitel des Kegels im Anfange der Coordinaten, so ist $N = o$, und die Gleichung des Kegels

$$x^2 + y^2 = M^2 . z^2,$$

wo M die Cotangente des Winkels ist, den die Seite des Kegels mit der Ebene der xy bildet.

12. §. Man bestimme die Bedingungen, die Statt haben müssen, damit eine Fläche der zweyten Ordnung durch Rotation entstanden sey.

Die allgemeine Gleichung der Flächen der zweyten Ordnung ist, wenn der Mittelpunct der Fläche zugleich der Anfang der Coordinaten ist,

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2(Byz + B'xz + B''xy) = C.$$

Soll diese Fläche durch Rotation entstanden seyn, so muss die Achse der Rotation durch den Mittelpunct der Fläche gehen, und dann werden die Gleichungen dieser Achse die Form haben

$$x = mz, \text{ und } y = nz.$$

Allein die allgemeine Gleichung der Flächen, die durch Rotation entstehen, ist

$$p(nz - y) - q(mz - x) + nx - my = o \ldots\ldots (VII),$$

wo $p = \left(\frac{dz}{dx}\right)$ und $q = \left(\frac{dz}{dy}\right)$ ist. Dieser letzten Gleichung muss daher die erste gegebene Gleichung der Flächen der zweyten Ordnung genug thun. Differentiirt man aber diese erste Gleichung partiell, so hat man

$$\left.\begin{array}{l} Ax + B''y + B'z + p(B'x + By + A''z) = o \\ B''x + A'y + Bz + q(B'x + By + A''z) = o \end{array}\right\} \ldots . VIII$$

und substituirt man die Werthe von p, q aus den Gleichungen (VIII) in (VII), so ist

$$\begin{aligned}&(B'n - B'')x^2 - (Bm - B'')y^2 + (Bm - B'n)z^2 \\ &+ [(A' - A'')m - B''n + B']yz + [(A'' - A)n + B''m - B]xz \\ &+ [Bn - B'm + A - A']xy = o.\end{aligned}$$

Diese Gleichung gehört offenbar für eine dritte Fläche, welche durch Rotation entsanden ist, und welche die Fläche des zweyten Grades ringsum berührt. Da aber diese beyden Flächen sich überall berühren, oder da sie zusammen fallen sollen, so muss die letzte Gleichung für alle Werthe von x, y, z Statt haben, oder sie muss unabhängig von dem Werthe dieser Coordinaten seyn, woraus also die Bedingsgleichungen folgen

$$\begin{array}{ll} B'n - B'' = o & (A' - A'')m - B''n + B' = o \\ Bm - B'' = o & (A'' - A)n + B''m - B = o \\ Bm - B'n = o & Bn - B'm + A - A' = o \end{array}$$

Von diesen sechs Gleichungen geben die beyden ersten

$$m = \frac{B''}{B}, \text{ und } n = \frac{B''}{B'},$$

die dritte ist eine Folge der beyden ersten. Substituirt man aber diese Werthe von m und n in den drey letzten Gleichungen, so erhält man

$$\left.\begin{array}{l} (A - A')BB' + (B^2 - B'^2)B'' = o \\ (A'' - A)BB'' + (B''^2 - B^2)B' = o \\ (A' - A'')B'B'' + (B'^2 - B''^2)B = o \end{array}\right\} (IX)$$

und da von diesen drey Gleichungen wieder jede eine

Folge der beyden andern ist, so wird die Fläche des zweyten Grades durch Rotation entstanden seyn, wenn zwey von den drey Gleichungen (IX) Statt haben, und dann sind die Gleichungen der Rotationsachse

$$x = \frac{B''}{B} z, \quad y = \frac{B''}{B'} z.$$

I. Dasselbe Verfahren lässt sich auch anwenden, um zu untersuchen, wenn eine gegebene Fläche der zweyten Ordnung cylindrisch ist.

Sind nähmlich $x = mz$, $y = nz$ die Gleichungen der Geraden, die durch den Anfang der Coordinaten parallel mit der erzeugenden Geraden geht, so ist die allgemeine Gleichung des Cylinders

$$mp + nq = 1.$$

Substituirt man in diesem Ausdrucke für p, q die Werthe aus den Gleichungen (VIII) des §. 12, so erhält man

$$(Am + B''n + B')\,x + (B''m + A'n + B)\,y + (B'm + Bn + A'')\,z = 0,$$

also sind die Bedingsgleichungen

$$Am + B''n + B' = 0$$
$$B''m + A'n + B = 0$$
$$B'm + Bn + A'' = 0.$$

Von diesen drey Gleichungen geben je zwey die Werthe von m und n, und die Elimination dieser Grössen m, n aus allen drey Gleichungen gibt

$$AB^2 + A'B'^2 + A''B''^2 = AA'A'' + 2BB'B'',$$

welches also die Gleichung ist, die Statt haben muss, wenn die Fläche der zweyten Ordnung cylindrisch ist.

II. Um endlich eben so zu untersuchen, ob die Fläche der zweyten Ordnung conisch ist, so hat man, wenn der Scheitel des Kegels im Anfang der Coordinaten ist,

$$z - px - qy = 0,$$

oder wenn man wieder die Werthe von p und q aus den Gleichungen (VIII) substituirt,

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2(Byz + B'xz + B''xy) = 0$$

und da diese Gleichung das erste Glied derjenigen ist, von der wir im Anfange dieses Paragraphes ausgegangen sind, so wird die Fläche der zweyten Ordnung conisch seyn, wenn das beständige Glied C ihrer Gleichung Null ist, wie bekannt.

Neuntes Capitel.

Flächen, welche durch die Bewegung einer geraden Linie entstehen.

1. §. Wir haben im Vorhergehenden bereits einige dieser Flächen betrachtet. Die conischen und cylindrischen Flächen nähmlich entstehen durch die Bewegung einer geraden Linie, die entweder immer durch einen festen Punct geht, oder immer einer andern festen Geraden parallel bleibt. Allein andere Gesetze, nach welchen sich die erzeugende Gerade bewegen soll, werden noch andere Flächen hervorbringen, welche entweder mit den beyden vorhergehenden nichts gemein haben, wie die des gegenwärtigen Capitels, oder welche jene beyde nur als sehr besondere Fälle in sich enthalten, wie die sind, welche wir in dem folgenden Capitel näher untersuchen wollen.

2. §. Man suche die Fläche, welche durch die Bewegung einer Geraden entsteht, die immer durch die Achse der z und durch eine gegebene Curve geht, und der Ebene der xy parallel bleibt.

Diese Fläche wird die Eigenschaft haben, dass jede Ebene durch die Achse der z jene Fläche in einer der xy parallelen Geraden schneidet. Die Gleichung einer solchen Ebene ist aber

$$y = ax,$$

und die einer der xy parallelen Geraden ist

$$z = b,$$

und da auch hier die beyden Grössen a und b zugleich constant und zugleich veränderlich sind, so ist

$$z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \ldots\ldots (I)$$

die gesuchte Gleichung dieser Flächen, und wenn man sie in Beziehung auf z, x und z, y differentiirt,

$$x\left(\frac{dz}{dx}\right) + y\left(\frac{dz}{dy}\right) = 0 \ldots (II),$$

von welcher letztern Gleichung die vorhergehende das vollständige Integral ist.

I. Ist die leitende Curve ein auf xy senkrechter Kreis des Halbmessers r, dessen Mittelpunct in der Achse der x vom Anfangspuncte um die Grösse b absteht, so sind die Gleichungen dieses Kreises

$$x = b$$
$$y^2 + z^2 = r^2.$$

Verbindet man diese mit den folgenden

$$\frac{y}{x} = a$$
$$z = \varphi a,$$

so erhält man durch die Elimination von x, y, z aus diesen vier Gleichungen

$$b^2 y^2 = (r^2 - z^2)\, x^2$$

für die Gleichung der gesuchten Fläche, welche bekanntlich manche unserer Gewölbe bilden.

II. Ist die leitende Curve eine Ellipse, deren Gleichungen

$$x = b \text{ und } \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1$$

sind, so findet man für die gesuchte Fläche

$$B^2 x^2 - b^2 y^2 = \frac{B^2}{C^2}\, x^2 z^2.$$

Ist die leitende Curve eine Gerade, deren Gleichungen

$$x = b, \text{ und}$$
$$z = My + N,$$

so ist die gesuchte Fläche

$$zx = Mby + Nx.$$

III. Es sey die leitende Curve eine Gerade, welche auf der Oberfläche eines senkrechten Cylinders mit kreisförmiger Basis aufgewickelt ist. Ist r der Halbmes-

ser dieser kreisförmigen Basis, und die Achse des Cylynders die Achse der z, die Gleichung der geraden Linie in der Ebene der yz endlich

$$\frac{y}{r} = \frac{z - B}{A},$$

so sind die Gleichungen dieser auf den Cylinder aufgewickelten Geraden, oder die Gleichungen der Schraubenlinie

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$z = A \text{ arc. Sin } \frac{x}{r} + B.$$

Verbindet man diese Gleichungen mit den folgenden $y = ax$ und $z = \varphi a$, so erhält man für die gesuchte Fläche

$$z - B = A \text{ . arc. Sin } \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \text{ oder}$$

$$z - B = A \text{ . arc. tang } \frac{x}{y}.$$

Übrigens kann jede Gleichung zwischen x y z und $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ als die einhüllende Fläche eines Raumes betrachtet werden, welcher von einer andern beweglichen Fläche, der eingehüllten, durchlaufen wird, und wir haben oben (Cap. VII) gesehen, wie man aus der Gleichung der einhüllenden Flächen, die ihrer Characteristik ableiten könne.

Ist nähmlich das Differential der Gleichung der einhüllenden Fläche bloss in Beziehung auf $\left(\frac{dz}{dx}\right) = p$ und $\left(\frac{dz}{dy}\right) = q$ genommen, gleich

$$P\,dp + Q\,dq = o,$$

so ist die Gleichung der Characteristik

$$P\,dy - Q\,dx = o.$$

Differentiirt man daher die Gleichung (II.) in Beziehung auf p und q, so ist $P = x$, $Q = y$, also die Gleichung der Characteristik

$$x\,dy - y\,dx = 0,$$

wovon das Integral $\frac{y}{x} = C$ ist, wenn C eine Constante bezeichnet. Die *Characteristik* ist also eine der x y parallele Gerade, oder sie ist die *erzeugende Gerade* selbst.

3. §. Man suche die Fläche, welche durch die Bewegung einer Geraden entsteht, die immer durch die Achse der z und durch zwey gegebene Curven geht.

Wenn man diese Fläche durch eine Ebene schneidet, welche durch die Achse der z geht, so wird die Durchschnittslinie beyder die erzeugende Gerade seyn, und es ist offenbar diese erzeugende Gerade constant oder veränderlich, nachdem jene schneidende Ebene fest oder beweglich ist, das heisst, nachdem die Grösse $\frac{y}{x}$ constant oder veränderlich ist. In derselben Voraussetzung wird also auch jede der Projectionen dieser erzeugenden Geraden in der Ebene der x z oder der y z constant oder veränderlich seyn, nachdem $\frac{y}{x}$ constant oder veränderlich ist. Die Gleichungen dieser Projectionen haben aber die Form

$$z = \alpha x + \beta$$
$$z = \alpha' y + \beta',$$

woraus folgt, dass α sowohl als β, und eben so α' sowohl als β' eine Function von $\frac{y}{x}$ seyn muss, und dass daher die gesuchte Gleichung der Fläche ist

$$\left.\begin{array}{l} z = x\,\varphi\,\frac{y}{x} + f\,\frac{y}{x} \text{ oder} \\ z = y\,\psi\,\frac{y}{x} + f\,\frac{y}{x} \end{array}\right\}\ \text{(III)},$$

wo φ, ψ, f willkührliche Functionen bezeichnen.

I. Differentiirt man eine dieser beyden Gleichungen z. B. die erste in Beziehung auf z x und auf z y, so erhält man, wenn p, q die vorige Bezeichnung haben,

$$p = \varphi\,\frac{y}{x} - \frac{y}{x}.\varphi' - \frac{y}{x^2}\,.\,f'$$

$$q = \varphi' + \frac{1}{x}\,.\,f',$$

woraus folgt

$$\left.\begin{aligned} px + qy &= x\varphi\,.\,\frac{y}{x} \text{ und} \\ z - px - qx &= f\,.\,\frac{y}{x} \end{aligned}\right\}\text{(IV.)},$$

und von diesen zwey Gleichungen (IV) gehört jede ebenfalls für die gesuchte Fläche.

II. Differentiirt man endlich eine der Gleichungen (IV), z. B. die letzte in Beziehung auf z x und auf z y, so erhält man, wenn man die Bezeichnungen der Grössen p, q, r, s, t aus (Capitel VI. §. 1.) beybehält, folgende zwey Gleichungen

$$rx + sy = \frac{y}{x^2}\,.\,f'$$

$$sx + ty = -\frac{1}{x}\,.\,f',$$

also auch, wenn man f' eliminirt

$$rx^2 + 2sxy + ty^2 = 0 \ldots \text{(V.)},$$

welches ebenfalls die Gleichung der gesuchten Fläche ist.

Unsere Fläche wird daher entweder durch eine Gleichung (V) ohne willkührlichen Functionen, aber mit zweyten partiellen Differentialien ausgedrückt, oder durch eine Gleichung (IV.) mit partiellen Differentialien der ersten Ordnung und einer willkührlichen Function, oder endlich durch eine Gleichung (III.) ohne Differentialien, aber mit zwey willkührlichen Functionen. Man sieht, dass jede der Gleichungen (IV.) das erste Integral der Gleichung (V.), und dass jede der Gleichungen (III.) das zweyte oder letzte Integral der Gleichung (V.) ist.

Betrachtet man diese Fläche wieder als eine einhüllende, so gibt jede der Gleichungen (IV.), wenn man sie bloss in Beziehung auf p und q differentiirt,

$$x\,dp + y\,dq = o,$$

also ist, wie in §. 2. die Characteristik der Fläche

$$x\,dy - y\,dx = o,$$

welche wieder die Gleichung der erzeugenden Geraden ist.

III. Es seyen A, B die Gleichungen der ersten, und C, D die der zweyten Curve, durch welche die erzeugende Gerade gehen soll, wo also A, B, C, D Functionen von x, y, z sind. Setzt man der Kürze wegen $\frac{y}{x} = u$, so ist die allgemeine Gleichung unserer Fläche

$$z = x\,\varphi\,u + f\,u \ldots (E).$$

Endlich wollen wir die Gleichung $\frac{y}{x} - u = o$ durch (F) bezeichnen.

Da die gesuchte Fläche durch die erste Curve gehen soll, so müssen die vier Gleichungen A B E F zugleich Statt haben. Eliminirt man daher aus ihnen die drey Grössen x, y, z, so erhält man eine Gleichung in u, φ u und f u, die wir G nennen wollen. Eben so, da die gesuchte Fläche durch die zweyte Curve gehen soll, so wird die Elimination von x, y, z aus den vier Gleichungen C D E F, eine andere Gleichung in u, φu und f u geben, die wir H nennen wollen, und aus den beyden Gleichungen G, H wird man durch Elimination die Werthe von φu und f u durch u, oder man wird die Form dieser beyden allgemeinen Functionen, den Bedingungen der besondern Aufgabe gemäss, bestimmen.

Einfacher noch wird man denselben Zweck erreichen, wenn man aus den vier Gleichungen E F G H die drey Grössen u, φ u und f u eliminirt, wodurch man eine Gleichung in x y z erhält, welche die der gesuchten Fläche seyn wird.

Ex. Seyen die beyden gegebeneu Curven gerade Linien, und die Gleichungen der ersten

$$x = A z + a$$
$$y = B z + b$$

und der zweyten

$$x = A' z + a'$$
$$y = B' z + b',$$

so hat man, wenn man darauf das angezeigte Verhalten anwendet, für die Gleichung der gesuchten Fläche

$$z[(Ab - Ba)(A'y - B'x) - (A'b' - B'a')(Ay - Bx)]$$
$$= (ay - bx)[A'b' - B'a' + B'x - A'y]$$
$$- (a'y - b'x)[Ab - Ba + Bx - Ay].$$

Für den besondern Fall $a' = b' = o$ geht dieser Ausdruck in folgenden einfachern über,

$$z(Ab - Ba) = bx - ay,$$

welches die Gleichung einer Ebene ist.

IV. Sind statt den beyden Curven zwey Flächen gegeben, an welche die erzeugende Gerade sich anlegen soll, während sie immer durch die Achse der z geht, so sey $U = o$ die Gleichung der ersten, und $V = o$ die der zweyten Fläche.

Sucht man durch partielle Differentiirung die Werthe von r s t aus der Gleichung $U = o$, und substituirt sie in die Gleichung III, so erhält man eine Gleichung $U' = o$ und die beyden Gleichungen $U = o$, $U' = o$ sind offenbar die Gleichungen der Curve, in welcher die erzeugende Gerade während ihrer Bewegung die erste Fläche berührt.

Sucht man eben so die Werthe von r s t aus der Gleichung $V = o$, und substituirt sie in die Gleichung III, so erhält man eine Gleichung $V' = o$, und beyde Gleichungen $V = o$, $V' = o$ werden für die Curve gehören, in welcher die erzeugende Gerade die zweyte Fläche berührt.

Da also die beyden leitenden Curven durch die Gleichungen $U = o$, $U' = o$ und $V = o$, $V' = o$ gegeben sind, so ist die Aufgabe auf die der Nro. III. zurück gebracht.

4. §. Man suche die Fläche, welche durch die Bewegung einer Geraden entsteht, die, während sie immer parallel mit einer auf x y senkrechten Ebene bleibt, durch zwey gegebene Curven geht.

Die allgemeine Gleichung einer auf x y senkrechten Ebene ist $y - Ax = a$.

Wenn ein Punct der gesuchten Fläche sich so bewegt, dass er immer in einer jener fixen Ebene parallelen Ebene bleibt, so bewegt er sich offenbar in einer geraden (der erzeugenden) Linie, das heisst, er bewegt sich in einer andern festen Ebene, von der die parallele, durch den Anfang der Coordinaten gehende Ebene seyn soll

$$z = \alpha x + \beta y.$$

Ist also die Grösse a oder $y - Ax$ constant, so sind auch die Grössen α und β constant, also sind α sowohl als β Functionen von a oder die gesuchte Gleichung unserer Fläche ist

$$z = x\varphi(y - Ax) + yf(y - Ax) \ldots (\mathrm{VI}),$$

oder wenn man sie differentiirt

$$p + Aq = \varphi(y - Ax) \ldots (\mathrm{VII}),$$

und wenn man sie noch einmahl differentiirt

$$r + 2As - A^2 t = o \ldots (\mathrm{VIII}),$$

von welchen Gleichungen dasselbe gilt, was von den Gleichungen I, II, III des §. 3. bemerkt wurde.

Sucht man die Fläche dieser Classe, welche durch zwey gegebene Curven geht, oder welche zwey gegebene Flächen rings umgibt, so wird man $y - Ax = u$ und $z = x\varphi u + yfu$ annehmen, und das Verfahren des §. 3. Nro. III. und IV. auch hier ungeändert anwenden.

5. §. Man suche endlich die Fläche, die durch die Bewegung einer geraden Linie überhaupt entsteht.

Die Bewegung einer Geraden im Raume ist bestimmt, wenn sie der Bedingung unterliegt, dass die Gerade immer durch drey gegebene Curven von doppelter Krümmung gehen soll. Denken wir uns durch

die drey Puncte dieser drey Curven, durch welche eben die erzeugende Gerade geht, drey gerade Linien, deren jede ihre Curve berührt, und ziehen wir dann durch die erzeugende Gerade und durch jede dieser drey Tangenten eine Ebene, so hat man drey Ebenen, deren jede eine tangirende Ebene zu der gesuchten Fläche seyn wird. Diess vorausgesetzt, hat die gesuchte Fläche offenbar die Eigenschaft, dass ein Punct sich in der ersten dieser tangirenden Ebenen, dann in der zweyten und endlich in der dritten bewegen kann, ohne dass er desswegen aufhört, sich in einer geraden Linie zu bewegen, das heisst, dass ein Punct sich dreymahl nach einander bewegen kann, ohne dass die drey Grössen dx, dy und dz ihre Werthe ändern. Differentiirt man aber die allgemeine Gleichung der Fläche

$$dz = p\,dx + q\,dy, \text{ oder}$$

$$dz = \left(\frac{dz}{dx}\right) dx + \left(\frac{dz}{dy}\right) dy,$$

indem man die Grössen dx, dy, dz als constant voraussetzt, so erhält man

$$o = \left[\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) dx + \left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right) dy\right] dx$$

$$+ \left[\left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right) dx + \left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) dy\right] dy,$$

oder, wenn man der Kürze wegen das gewöhnliche Differential dy durch dx dividirt, gleich ω, also $\frac{dy}{dx} = \omega$ setzt,

$$o = \left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) + 2\left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right)\omega + \left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right)\omega^2 \ldots\ldots (IX).$$

Differentiirt man diese Gleichung (IX) noch einmahl, indem man wieder dx, dy, dz, das heisst, indem man ω als constant voraussetzt, so hat man

$$o = \left(\frac{d^3 z}{dx^3}\right) + 3\left(\frac{d^3 z}{dx^2\,dy}\right)\omega + 3\left(\frac{d^3 z}{dx\,dy^2}\right)\omega^2$$

$$+ \left(\frac{d^3 z}{dy^3}\right)\omega^3 \ldots\ldots (X).$$

In diesen beyden Gleichungen (IX), (X) bestimmt der Werth von $\omega = \frac{dy}{dx}$ die Richtung, in welcher jener Punct sich auf der Fläche bewegen muss, damit er dreymahl nach einander sich in einer geraden Linie bewegen könne. Eliminirt man also aus diesen beyden Gleichungen die Grösse ω, so erhält man die oben angeführte allgemeine Eigenschaft der gesuchten Fläche, d. h., man hat die Gleichung dieser Fläche selbst.

I. Um die endliche Gleichung dieser Fläche zu finden, seyen die Gleichungen der erzeugenden Geraden

$$y = \alpha x + \gamma$$
$$z = \beta x + \delta.$$

Bewegt sich ein Punct der Fläche, ohne dieselbe Lage der erzeugenden Geraden zu verlassen, so sind offenbar die drey Grössen dx, dy, dz (von denen immer zwey die dritte bestimmen) constant, also sind auch die Grössen α und β constant, so wie die Grössen γ und δ. Bewegt sich aber jener Punct von einer erzeugenden Geraden zur andern, so sind diese vier Grössen α, β, γ, δ veränderlich, also sind immer je drey derselben eine Function der vierten, oder man hat

$$\left.\begin{aligned} y - \alpha x &= f\alpha \\ z - x\varphi\alpha &= \psi\alpha \end{aligned}\right\} \text{(XI.)},$$

und die Elimination von α aus diesen beyden Gleichungen wird die Gleichung der gesuchten Fläche geben.

II. Sind daher die drey Curven von doppelter Krümmung, durch welche die erzeugende Gerade gehen soll, gegeben, so wird man zwischen den zwey Gleichungen (XI) und den zwey Gleichungen der ersten Curve die drey Grössen x y z eliminiren, und dadurch eine Gleichung zwischen den vier Grössen α, $f\alpha$, $\varphi\alpha$, $\psi\alpha$ erhalten.

Verfährt man eben so mit den beyden andern Curven, so erhält man noch zwey Gleichungen zwi-

schen denselben vier Grössen, und aus diesen drey Gleichungen zwischen α, $f\alpha$, $\varphi\alpha$, $\psi\alpha$ wird man durch Elimination die Werthe von $f\alpha$, $\varphi\alpha$ und $\psi\alpha$ durch α bestimmen.

Auch kann man kürzer aus den drey Gleichungen zwischen α, $f\alpha$, $\varphi\alpha$, $\psi\alpha$ und den zwey Gleichungen (XI) die vier Grössen α, $f\alpha$, $\varphi\alpha$ und $\psi\alpha$ eliminiren, wodurch man eine Gleichung in x, y, z erhält, welche für die gesuchte Fläche gehört.

Ex. Seyen die Gleichungen der ersten Curve

$$x = Az + a \text{ und}$$
$$y = Bz + b.$$

Für die zweyte und dritte wollen wir die Grösse A, B und a b mit einem und mit zwey Strichen bezeichnen.

Eliminirt man x, y und z aus den Gleichungen (XI) und denen der ersten Curve, so ist

$$\frac{f\alpha - b + a\alpha}{B - A\alpha} = \frac{\psi\alpha + a\varphi\alpha}{1 - A\varphi\alpha},$$

und eben so für die zweyte und dritte Curve

$$\frac{f\alpha - b' + a'\alpha}{B' - A'\alpha} = \frac{\psi\alpha + a'\varphi\alpha}{1 - A'\varphi\alpha}$$

$$\frac{f\alpha - b'' + a''\alpha}{B'' - A''\alpha} = \frac{\psi\alpha + a''\varphi\alpha}{1 - A''\varphi\alpha}.$$

Substituirt man in diesen drey Gleichungen die Werthe von $f\alpha$ und $\psi\alpha$ aus (XI), so erhält man

$$\alpha = \frac{Bz + B(a - x)\varphi\alpha + (b - y)(1 - A\varphi\alpha)}{Az + a - x}$$

$$\alpha = \frac{B'z + B'(a' - x)\varphi\alpha + (b' - y)(1 - A'\varphi\alpha)}{A'z + a' - x}$$

$$\alpha = \frac{B''z + B''(a'' - x)\varphi\alpha + (b'' - y)(1 - A''\varphi\alpha)}{A''z + a'' - x},$$

und je zwey dieser Werthe von α einander gleich gesetzt, geben

$$\varphi\alpha = \frac{(B'z + b' - y)(Az + a - x) - (Bz + b - y)(A'z + a' - x)}{[B(a-x) - A(b-y)](A'z + a' - x) - [B'(a'-x) - A'(b'-y)](Az + a - x)}$$

$$\varphi\alpha = \frac{(B''z + b'' - y)(Az + a - x) - (Bz + b - y)(A''z + a'' - x)}{[B(a-x) - A(b-y)](A''z + a'' - x) - [B''(a''-x) - A''(b''-y)](Az + a - x)}$$

$$\varphi\alpha = \frac{(B''z + b'' - y)(A'z + a' - x) - (B'z + b' - y)(A''z + a'' - x)}{[B'(a'-x) - A'(b'-y)](A''z + a'' - x) - [B''(a''-x) - A''(b''-y)](A'z + a' - x)}$$

und je zwey dieser Werthe von $\varphi\alpha$ einander gleich gesetzt, geben die gesuchte Gleichung der Fläche

Nimmt man als einen besondern Fall an, dass A'' B'' a'' b'' Null ist, das heisst, dass die dritte Curve die Achse der z ist, so erhält man die Auflösung der Aufgabe, die wir schon §. 3. Nro. III. betrachtet haben. In der That setzt man die beyden letzten Ausdrücke von $\varphi\alpha$ einander gleich, so hat man

$$\frac{y(Az + a - x) - x(Bz + b - y)}{Bx(a - x) - Ax(b - y)} = \frac{y(A'z + a' - x) - x(B'z + b' - y)}{B'x(a' - x) - A'x(b' - y)}$$

welcher Ausdruck mit dem in §. 3. Nro. III. gefundenen identisch ist.

Zehntes Capitel.

Developpable Flächen.

1. §. Developpable Flächen nennt man diejenigen, welche durch die Bewegung einer geraden Linie entstehen, deren je zwey nächste Lagen immer in *einer* Ebene sind. Diese zwey nächsten erzeugenden Geraden müssen sich also entweder einander schneiden, oder wenn sie sich nicht schneiden, einander parallel seyn. Zu den ersten gehören offenbar die conischen, und zu den zweyten die cylindrischen Flächen, aber man sieht zugleich, dass die conischen und cylindrischen Flächen, welche wir Capitel VIII. in ihrer ganzen Allgemeinheit betrachtet haben, nur als sehr besondere Fälle in den developpablen Flächen enthalten sind.

Da in den developpablen Flächen je zwey nächste erzeugende Gerade in *einer* Ebene liegen, so können diese Flächen als aus ebenen Elementen von unbestimmter Länge bestehend betrachtet werden, deren Breite aber unendlich klein ist, und die sich daher in geraden Linien schneiden.

Lässt man das erste dieser Elemente um seine gerade Durchschnittslinie mit dem zweyten Elemente drehen, bis es in die Ebene des zweyten Elementes fällt; lässt man ferner das System dieser zwey ersten Elemente um die Durchschnittslinie des zweyten und dritten Elementes drehen, bis dieses System in die Ebene des dritten Elementes fällt u. s. f., so sieht man, dass sich alle Elemente der Fläche, also die ganze developpable Fläche selbst in eine einzige Ebene ohne Bruch und Verdoppelung ausbreiten lasse, und diese Eigenschaft ist es,

welche die developpablen Flächen vor allen andern auszeichnet.

2. §. Wenn man eine Ebene so bewegt, dass sie durch alle auf einander folgenden Puncte einer gegebenen Curve auf dieser Curve senkrecht steht, so werden die Durchschnitte je zwey nächster dieser normalen Ebenen offenbar eine developpable Fläche bilden. Eben so wird man eine developpable Fläche erhalten, wenn durch alle auf einander folgenden Puncte einer Curve eine Ebene liegt, die zwey gegebene Flächen berührt.

In beyden Fällen kann die developpable Fläche, die aus den auf einander folgenden Durchschnitten der beweglichen Ebene besteht, als eine einhüllende Fläche betrachtet werden, während die bewegliche Ebene die eingehüllte Fläche vorstellt, woraus folgt, dass die Characteristik der developpablen Fläche, das heisst, der Durchschnitt je zwey nächster eingehüllten Flächen, eine *gerade Linie* seyn muss. Also kann die einhüllende oder die developpable Fläche auch, als durch die Bewegung einer Geraden entstanden, betrachtet werden. Da endlich zwey nächste Characteristiken immer auf derselben eingehüllten Fläche, das heisst, in *einer* Ebene sind, so werden sich je zwey nächste Characteristiken, d. h. je zwey nächste erzeugende Geraden irgendwo, wenn sie nicht parallel sind, in einem Puncte schneiden, und die Folge dieser Durchschnittspuncte wird auf der developpablen Fläche eine *Wendungscurve* bilden, zu welcher die erzeugende Gerade in allen ihren Lagen immer Tangente ist.

Daraus folgt, dass man die developpablen Flächen auch als solche betrachten kann, die durch die Bewegung einer Geraden entstehen, die immer Tangente einer gegebenen Curve von doppelter Krümmung ist.

3. §. Es seyen also $x = fz$ und $y = Fz$ die Gleichungen einer Curve. Betrachtet man auf ihr einen Punct,

dessen Ordinate $z = a$ ist, so werden die beyden andern Coordinaten dieses Punctes $x = fa$ und $y = Fa$ seyn.

Sey ferner

$$z = Ax + By + C$$

die Gleichung einer Ebene. Wenn diese Ebene durch jenen Punct $z = a$ der Curve gehen und auf dieser Curve senkrecht stehen soll, so ist durch diese zwey Bedingungen die Lage der Ebene vollständig bestimmt, also sind auch die drey Grössen A, B, C, von welchen diese Lage abhängt, vollständig bestimmt.

Diese drey Grössen werden im Allgemeinen Functionen von a seyn, denn wenn man der Grösse a einen andern Werth gibt, das heisst, wenn man einen andern Punct der Curve betrachtet, so wird die normale Ebene durch diesen Punct im Allgemeinen der ersten normalen Ebene nicht parallel seyn, oder die Grössen A, B, C werden jetzt andere von den vorigen verschiedene Werthe erhalten. Diese Grössen variiren also, wenn a variirt, oder sie sind Functionen von a, also kann man annehmen

$$z = x\varphi a + y\psi a + a \ldots. (A)$$

Gibt man der Grösse a nach und nach alle möglichen Werthe, so erhält man die Folge aller auf die gegebene Curve senkrechten Ebenen, deren je zwey nächste sich in einer geraden Linie schneiden, welche nach dem Vorhergehenden die Characteristik oder die erzeugende Linie der developpablen Fläche ist, und welche Fläche selbt gleichsam aus allen diesen Durchschnittslinien besteht.

Differentiirt man also die Gleichung (A) zweymahl in Beziehung auf a, so erhält man

$$x\varphi' a + y\psi' a + 1 = 0 \ldots (B)$$

$$x\varphi'' a + y\psi'' a = 0 \ldots\ldots (C).$$

Die zwey ersten Gleichungen (A), (B) zusammen genommen, sind die der Characteristik. Da aber die

Gleichung (A) die einer Ebene überhaupt, und die Gleichung (B) die einer andern auf $x\,y$ senkrechten Ebene ist, so ist die Characteristik eine gerade Linie, nähmlich die erzeugende Gerade (§. 2.).

Betrachtet man aber in den beyden Gleichungen (A), (B) die Grösse a als eine unbestimmte Grösse von unveränderlichem Werthe, so wird das Resultat der Elimination von a aus diesen beyden Gleichungen die Aufeinanderfolge der Durchschnittslinien unserer beweglichen Ebene ausdrücken, das heisst, wenn man aus (A), (B) die Grösse a eliminirt, so erhält man die Gleichung der *developpablen Fläche.*

Eliminirt man endlich die Grösse a aus den drey Gleichungen A, B, C, so erhält man zwey Gleichungen in $x\,y\,z$, welche für die Wendungscurve der developpablen Fläche, das heisst, für die Curve gehören, welche von der erzeugenden Geraden in allen ihren Puncten tangirt wird.

4. §. Differentiirt man die Gleichung (A) partiell, so erhält man

$$p = \varphi a \quad \text{und}$$
$$q = \psi a$$

woraus folgt

$$p = f q \ldots\ldots \text{I}$$

wenn f irgend eine Function bezeichnet.

Ferner war $a = z - x\varphi a - y\psi a$, oder wenn man die eben erhaltenen Werthe von φa und ψa substituirt

$$a = z - p x - q y,$$

also geben die Gleichungen $p = \varphi a$ und $q = \psi a$ auch folgende

$$p = \varphi(z - p x - q y) \ldots\ldots \text{II}$$
$$q = \psi(z - p x - q y) \ldots\ldots \text{III},$$

und jede der Gleichungen I, II, III ist ebenfalls die allgemeine Gleichung der developpablen Flächen.

5. §. Die Gleichung $p = f q$ gibt, wenn man sie in Beziehung auf z, x und auf z, y differentiirt,

$$r = s \,.\, f'$$

$$s = t \,.\, f',$$

wo f′ eine Function bezeichnet, und aus diesen beyden Gleichungen folgt

$$s^2 = r \,.\, t \,\ldots\, IV,$$

welches also ebenfalls eine allgemeine Gleichung der developpablen Flächen ist. Diese Gleichung IV gibt also ein Mittel, zu erkennen, ob eine gegebene Fläche developpabel ist. So findet man, dass die cylindrischen und conischen Flächen developpabel sind, weil ihre allgemeinen Gleichungen der Gleichung IV genug thun.

Die developpablen Flächen werden also entweder durch eine Gleichung IV zwischen zweyten partiellen Differentialien ausgedrückt, oder durch eine Gleichung I, II, III zwischen ersten partiellen Differentialien und einer willkührlichen Function, oder endlich durch das System von zwey endlichen Gleichungen (A), (B) mit zwey willkührlichen Functionen, aus welcher man eine unbestimmte Grösse a eliminirt, und man sieht, dass von der Gleichung IV das erste Integral eine der Gleichungen I, II, III, und dass das letzte Integral der Gleichung IV das System der zwey endlichen Gleichungen (A), (B) ist.

6. §. Wollte man nach §. 2. die developpablen Flächen als solche betrachten, die durch die Bewegung einer Geraden entstehen, welche immer Tangente einer Curve von doppelter Krümmung ist, so seyen

$$x = fz \text{ und } y = Fz$$

die Gleichungen dieser Curve. Wählt man in ihr einen Punct, zu welchem z = a gehört, so ist für diesen Punct

$$x = fa, \; y = Fa,$$

und wenn man diesen Punct als den Berührungspunct der Tangente betrachtet, so sind die zwey Gleichungen der Tangente

$$x - fa = (z - a) \,.\, f'a$$

$$y - Fa = (z - a) \,.\, F'a,$$

und das Resultat der Elimination von a aus diesen beyden Gleichungen wird ebenfalls die allgemeine Gleichung der developpablen Flächen geben.

In der That, differentiirt man die erste in Beziehung auf x und z, und die zweyte in Beziehung auf y und z, so erhält man

$$1 = p \,.\, f' a$$
$$1 = q \,.\, F' a,$$

woraus wieder

$$p = fq$$

folgt, wie zuvor.

Da die allgemeine Gleichung der developpablen Flächen $s^2 = r\,t$ nur zweyte Differentialien enthält, so folgt, dass, wenn $z = k$ die Gleichung irgend einer developpablen Fläche ist, die folgende Gleichung

$$z = K + Ax + By + C$$

auch für eine developpable Fläche gehören wird, wenn A, B, C constante Grössen sind. Denn durch die doppelte Differentiation werden die Grössen Ax, By und C sammt ihren Differentialien wieder verschwinden.

I. Um die Fläche zu finden, deren Elemente zu ihrer Projection in der Ebene der $x\,y$ ein constantes Verhältniss haben, wird man bemerken, dass der allgemeine Ausdruck des Elements einer Fläche gleich

$$dx\,dy\,\sqrt{1 + p^2 + q^2}$$

und der der Projection desselben gleich $dx\,dy$ ist; dass daher, wenn A eine constante Grösse bezeichnet, die Gleichung der gesuchten Fläche ist

$$A\,dx\,dy = dx\,dy\,\sqrt{1 + p^2 + q^2},$$

oder

$$1 + p^2 + q^2 = A^2,$$

oder endlich

$$p = fq,$$

woraus folgt, dass die gesuchte Fläche developpabel

seyn muss, und dass die developpablen Flächen, welche die geforderte Eigenschaft haben, diejenigen sind, welche durch die Tangenten einer Curve gebildet werden, deren Elemente selbst gegen die Ebene der x y eine constante Neigung haben.

7. §. Man suche die developpable Fläche, welche durch zwey gegebene Curven von doppelter Krümmung geht.

Seyen

$$x = fz,\ y = Fz$$

die Gleichungen der ersten, und

$$x = gz,\ y = Gz$$

die der zweyten gegebenen Curve. Die gesuchte developpable Fläche wird durch diese zwey Curven gehen, wenn die bewegliche Ebene, von welcher die developpable Fläche als die einhüllende betrachtet wird, in allen ihren Lagen eine tangirende Ebene zu jenen beyden Curven ist, das heisst, wenn die bewegliche Ebene immer zugleich durch eine Tangente der ersten, und durch eine Tangente der zweyten Curve geht. Ist $z = \beta$ der Berührungspunct der ersten Curve, so sind die Gleichungen der ersten Tangente

$$\left.\begin{array}{l} x - f\beta = (z - \beta)\, f'\beta \\ y - F\beta = (z - \beta)\, F'\beta \end{array}\right\} \text{(I)},$$

und ist $z = \gamma$ der Berührungspunct der zweyten Curve, so sind die Gleichungen der zweyten Tangente

$$\left.\begin{array}{l} x - g\gamma = (z - \gamma)\, g'\gamma \\ y - G\gamma = (z - \gamma)\, G'\gamma \end{array}\right\} \text{(II)}.$$

Diess vorausgesetzt, ist die Gleichung der beweglichen Ebene

$$z = x\,\varphi a + y\,\psi a + a,$$

und da diese Ebene erstens durch den Punct $z = \beta$ und durch den Punct $z = \gamma$ gehen soll, so hat man für die Gleichung dieser Ebene

$$\left.\begin{aligned} z-\beta &= (x-f\gamma)\varphi a + (y-F\beta)\psi a \\ z-\gamma &= (x-g\gamma)\varphi a + (y-G\gamma)\psi a \end{aligned}\right\}\text{(III)},$$

oder auch

$$\left.\begin{aligned} \beta - f\beta.\varphi a - F\beta.\psi a &= a \\ \gamma - g\gamma.\varphi a - G\gamma.\psi a &= a \end{aligned}\right\}\text{(IV)}.$$

Aber diese Ebene muss auch noch durch die beyden Tangenten der Curven gehen, das heisst, die sechs Gleichungen I, II und III müssen zugleich Statt haben, welches auch die Werthe von x y z sind.

Eliminirt man daher aus I und der ersten der Gleichungen III die Grössen

$$\frac{y-F\beta}{z-\beta}, \quad \frac{x-f\beta}{z-\beta},$$

so erhält man

$$f'\beta.\varphi a + F'\beta.\psi a = 1 \ldots . \text{(V)},$$

und eliminirt man aus II und der letzten der Gleichungen III die Grössen

$$\frac{y-G\gamma}{z-\gamma}, \quad \frac{x-g\gamma}{z-\gamma},$$

so erhält man

$$g'\gamma.\varphi a + G\gamma.\psi a = 1 \ldots . \text{(VI)}.$$

Dadurch haben wir also vier Gleichungen IV, V und VI zwischen den Grössen β, γ und a, φ a, ψ a erhalten.

Eliminirt man also aus ihnen die beyden Grössen β, γ, so erhält man zwey Gleichungen zwischen φ a und ψ a, aus welchen man die Form der Functionen φ und ψ bestimmen wird.

Auch kann man einfacher aus den vier Gleichungen III und V, VI die zwey unbekannten Functionen φ a, ψ a und eine der beyden Grössen β, γ, z. B. die letzte γ eliminiren, wodurch man eine Gleichung M = o zwischen x y z und β erhält, welches die Gleichung der beweglichen, jene beyden Curven berührenden Ebene

seyn wird, und in welcher β die Constante ist, von welcher die Lage dieser Ebene abhängt. Differentiirt man daher diese Gleichung zweymahl in Beziehung auf β, so erhält man

$$M = o, \left(\frac{dM}{d\beta}\right) = o, \left(\frac{d^2 M}{d\beta^2}\right) = o,$$

und das Resultat der Elimination von β aus den beyden ersten Gleichungen gibt die gesuchte *developpable Fläche*, so wie das Resultat der Elimination derselben Grösse a aus allen drey Gleichungen, die zwey Gleichungen der *Wendungscurve* der developpablen Fläche geben wird.

8. §. Man suche die develloppable Fläche, welche zwey ihrer Gestalt und Lage nach gegebene Flächen ringsum berührt.

Seyen die Gleichungen der zwey gegebenen Flächen

$$z = F(x, y) \text{ und}$$
$$z = f(x, y)$$

deren erste Differentialgleichungen wir so ausdrücken wollen

$$dz = F'(xy).dx + F''(xy).dy$$
$$dz = f'(xy).dx + f''(xy).dy.$$

Nimmt man auf der ersten Fläche den Punct, dessen Coordinaten

$$x = A, y = B \text{ und}$$
$$z = F(AB)$$

sind, für den Berührungspunct an, so ist die Gleichung der berührenden Ebene durch diesen Punct

$$z - F(AB) = (x - A) F'(AB) + (y - B) F''(AB) \ldots I,$$

und sind eben so

$$x = a, y = b, z = f(ab)$$

die Coordinaten des Berührungspunctes der zweyten Fläche, so ist die Gleichung der sie in diesem Puncte berührenden Ebene

$$z - f(ab) = (x - a) f'(ab) + (y - b) f''(ab) \ldots (II).$$

Da aber beyde tangirende Ebenen zusammenfallen, und nur eine, beyde Flächen zugleich berührende Ebene bilden sollen, so müssen die drey Coefficienten der einen Ebene, gleich den analogen Coefficienten der andern Ebene seyn, wodurch man erhält

$$\left.\begin{array}{l} F'(A\,B) = f'(a\,b) \\ F''(A\,B) = f''(a\,b) \\ F(A\,B) - A\,F'(A\,B) - B\,F''(A\,B) = f(a\,b) - a\,f'(a\,b) - b\,f''(a\,b) \end{array}\right\} \text{III.}$$

Eliminirt man also aus den fünf Gleichungen I, II, III die vier Grössen A, B, a, b, so erhält man eine Gleichung in x y z, welche für die gesuchte developpable Fläche gehört. Man kann aber auch bequemer so verfahren: man eliminirt aus den Gleichungen I, II ... und aus den zwey ersten der Gleichungen III von den vier Grössen A, B, a, b drey z. B. die drey letzten, so erhält man in x y z und A eine Gleichung M = o, welches die beyden Flächen gemeinschaftliche tangirende Ebene ist, deren Lage durch die unbestimmte Grösse A particularisirt wird. Differentiirt man daher diese Gleichung zweymahl in Beziehung auf A, so erhält man

$$M = o, \left(\frac{d\,M}{d\,A}\right) = o, \left(\frac{d^2\,M}{d\,A^2}\right) = o,$$

und wenn man aus den beyden ersten dieser Gleichungen die Grösse A eliminirt, so erhält man die Gleichung der gesuchten developpablen Fläche, so wie die Elimination von A aus allen drey Gleichungen die zwey Gleichungen in x y z gibt, welche für die Wendungscurve dieser developpablen Fläche gehören.

Eliminirt man endlich die Grössen a, b aus den drey Gleichungen III, so erhält man eine Gleichung zwischen A, B, welche für die Curve gehört, in welcher die develloppable Fläche die erste gegebene Fläche z = F (xy) berührt; so wie die Elimination von A B aus denselben Gleichungen die eine Projection der Curve gibt, in welcher die develloppable Fläche die zweyte gegebene Fläche z = f (xy) berührt.

Ist eine dieser Flächen leuchtend, und die andere dunkel, so werden die gesuchten developpablen Flächen diejenigen seyn, welche den Schatten und den Halbschatten des dunklen Körpers begränzen, und die Berührungscurven auf den beyden Flächen werden diejenigen seyn, die auf der dunklen Fläche den beleuchteten Theil von dem dunklen trennen, und die auf der leuchtenden Fläche denjenigen Theil, welcher sein Licht auf die dunkle Fläche sendet, von dem absondert, dessen Strahlen die dunkle Fläche nicht erreichen.

I. Auch kann man diese Aufgabe leicht auf die vorhergehende des §. 7 bringen.

Sind nähmlich

$$z = F(xy)$$

$$z = f(xy)$$

die Gleichungen der beyden gegebenen Flächen, so werden für alle Puncte der Berührungscurve dieser Fläche mit der developpablen Fläche die Werthe von x y z p q und die von r s t dieselben seyn. Differentiirt man daher die erste Fläche zweymahl, und nennt die Werthe von r s t, die man so erhält R S T, so wird eine Gleichung in x y z der Berührungscurve der ersten gegebenen und der developpablen Fläche seyn,

$$S^2 = R \,.\, T$$

und wenn eben so R′ S′ T′ die Werthe von r s t aus der Gleichung $z = f(xy)$ sind, so wird eine Gleichung der zweyten Berührungscurve seyn

$$S'^2 = R' \,.\, T'.$$

Wir können daher auch annehmen, dass die gesuchte developpable Fläche, statt jene beyden gegebenen Flächen ringsum zu berühren, durch zwey gegebene Curven geht, deren Gleichungen sind,

die erste $z = F(xy)$ und $S^2 = R \,.\, T$

die zweyte $z = f(xy)$ und $S'^2 = R' \,.\, T'$

und dann das Verfahren des §. 7 unmittelbar auch hier anwenden.

S

Ex. Seyen die beyden gegebenen Flächen Kugeln, R der Halbmesser der leuchtenden, r der dunkeln Kugel, und c die Entfernung beyder Mittelpuncte. Ist der Mittelpunct der leuchtenden Kugel zugleich der Anfang der Coordinaten, so sind die Gleichungen der beyden Kugeln

$$z^2 = R^2 - x^2 - y^2$$
$$z^2 = r^2 - (x-c)^2 - y^2.$$

Daraus folgen sofort die Gleichungen, welche wir oben §. 8. I. und II. nannten

$$z = \frac{R^2 - A^2 - B^2 - A(x-A) - B(y-B)}{\sqrt{R^2 - A^2 - B^2}} \ldots \text{I.}$$

$$z = \frac{r^2 - (a-c)^2 - b^2 - (a-c)(x-a) - b(y-b)}{\sqrt{r^2 - (a-c)^2 - b^2}} \ldots \text{II.}$$

Setzt man die analogen Coefficienten dieser beyden Gleichungen einander gleich, so erhält man für die zwey ersten der Gleichungen III.

$$\frac{A}{\sqrt{R^2 - A^2 - B^2}} = \frac{a-c}{\sqrt{r^2 - (a-c)^2 - b^2}}$$

$$\frac{B}{\sqrt{R^2 - A^2 - B^2}} = \frac{b}{\sqrt{r^2 - (a-c)^2 - b^2}}$$

und für die dritte der Gleichungen III.

$$\sqrt{R^2 - A^2 - B^2} + \frac{A^2 + B^2}{\sqrt{R^2 - A^2 - B^2}} = \sqrt{r^2 - (a-c)^2 - b^2}$$
$$+ \frac{a(a-c) + b^2}{\sqrt{r^2 - (a-c)^2 - b^2}}, \text{ oder}$$

$$\sqrt{R^2 - A^2 - B^2} - \sqrt{r^2 - (a-c)^2 - b^2} + \frac{A(A-a) + B(B-b)}{\sqrt{R^2 - A^2 - B^2}} = 0.$$

Die zwey ersten dieser Gleichungen III. geben durch Division

$$b = \frac{a-c}{A} . B.$$

Substituirt man diesen Werth von b in dieselben

zwey ersten Gleichungen III., so gibt jede derselben, wenn man sie quadrirt

$$A^2 r^2 = (a - c)^2 . R^2$$

und die dritte der Gleichungen III. wird

$$(R^2 - A c) A + R^2 c - R^2 a = o.$$

Diese beyden letzten Gleichungen geben

$$A = \frac{R^2 \mp R r}{c} = \frac{R}{c} (R \mp r) \text{ und}$$

$$a = c - \frac{r}{c} (r \mp R),$$

und dieser Werth von A in die Gleichung I. substituirt, gibt

$$z - \frac{R^2 c - R x (R \mp r) - B c y}{\sqrt{R^2 c^2 - R^2 (R \mp r)^2 - B^2 c^2}} = o \ldots (1),$$

und diess ist die Gleichung zwischen x y z und B, welche wir oben M = o nannten.

Differentiirt man sie zweymahl in Beziehung auf die Grösse B, so erhält man

$$B c z = y \sqrt{R^2 c^2 - R^2 (R \mp r)^2 - B^2 c^2} \ldots (2) \text{ und}$$

$$\frac{B c y}{z} = - \sqrt{R^2 c^2 - R^2 (R \mp r)^2 - B^2 c^2} \ldots (3).$$

Von diesen gibt die Gleichung (2)

$$B^2 = \frac{y^2 (R^2 c^2 - R^2 (R \mp r)^2)}{c^2 (y^2 + z^2)},$$

und dieser Werth von B in (1) substituirt, gibt

$$[y^2 + z^2] . [c^2 - (R \mp r)^2] = [R c - x (R \mp r)]^2 \ldots (4),$$

die Gleichung der gesuchten Fläche, die also ein doppelter Kegel ist, das obere Zeichen für den vollen, das untere für den halben Schatten.

Die Gleichungen (3) und (4) geben durch Division

$$z^2 = - y^2,$$

und diese letzte Gleichung, verbunden mit der Gleichung (4), gehört für die Wendungscurve. Da aber die Gleichung $z^2 + y^2 = o$ nur für den einzigen Werth

$y = 0$, $z = 0$ Statt haben kann, so gibt (4), wenn man darin $y = z = 0$ setzt,

$$x = \frac{c}{1 \mp \frac{r}{R}}.$$

Die Wendungscurve ist also hier ein einziger Punct, der Scheitel des Kegels, und

$$x = \frac{c}{1 \mp \frac{r}{R}},$$

ist die Entfernung des Scheitels vom Mittelpuncte der leuchtenden, so wie

$$x - c = \frac{\pm c}{\frac{R}{r} \mp 1}$$

vom Mittelpuncte der dunkeln Kugel.

Substituirt man ferner die Werthe von A und a aus den vorhergehenden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{R}{c}(R \mp r) \\ a &= c - \frac{r}{c}(r \mp R) \end{aligned}\right\} (5)$$

in den Gleichungen

$$F\,(AB)^2 = R^2 - A^2 - B^2$$
$$f\,(ab)^2 = r^2 - (a - c)^2 - b^2,$$

so erhält man

$$\left.\begin{aligned} F\,(AB)^2 + B^2 &= R^2 - \frac{R^2}{c^2}(R \mp r)^2 \\ f\,(ab)^2 + b^2 &= r^2 - \frac{r^2}{c^2}(r \mp R)^2 \end{aligned}\right\} (6)$$

und (5), (6) sind die Gleichungen der acht Projectionen der vier Berührungscurven in den Ebenen der xy und der yz. Die Gleichungen (5) zeigen, dass diese Berührungscurven in einer auf xy senkrechten Ebene stehen, und dass sie vom Anfangspuncte der Coordinaten um die angezeigten Werthe von A und a entfernt sind. Die Gleichungen (6) zeigen, dass diese Berührungscurven Kreise sind, deren Halbmesser

$$\sqrt{R^2 - \frac{R^2}{c^2}(R \mp r)^2} \text{ und } \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{c^2}(r \mp R)^2} \text{ sind.}$$

Ist endlich $x = c + C$,
so wird die Gleichung (4)

$$\sqrt{y^2 + z^2} = \frac{\pm r(c + C) - R \cdot C}{\sqrt{c^2 - (R - r)^2}},$$

welches der Halbmesser des kreisförmigen Schnittes des vollen und des halben Schattens ist, der durch eine Ebene entsteht, die senkrecht auf xy steht, und die um die Grösse C von dem Mittelpuncte der dunkeln Kugel entfernt ist.

9. §. Wir wollen nun noch suchen, in welchen Fällen die Flächen der zweyten Ordnung developpable Flächen sind.

Die allgemeine Gleichung der Flächen der zweyten Ordnung ist:

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2(Byz + B'xz + B''xy) = C \ldots (1).$$

Differentiirt man diese Gleichung partiell, so ist

$$Ax + B''y + B'z + p(B'x + By + A''z) = 0$$
$$Bx + A'y + Bz + q(B'x + By + A''z) = 0$$

und von diesen beyden Gleichungen sind wieder die partiellen Differentialien

$$A + 2B'p + A''p^2 + r(B'x + By + A''z) = 0$$
$$B'' + B'q + Bq + A''pq + s(B'x + By + A''z) = 0$$
$$A' + 2Bq + A''q^2 + t(B'x + By + A''z) = 0.$$

Substituirt man diese Werthe von r, s, t in der allgemeinen Gleichung

$$s^2 = rt$$

der developpablen Flächen, so hat man

$$p^2(A'A'' - B^2) + q^2(AA'' - B'^2) + AA' - B^2$$
$$+ 2pq(BB' - A''B'') + 2p(A'B' - BB'')$$
$$+ 2q(AB - B'B'') = 0$$

und wenn man in dieser Gleichung noch die Werthe von p und q aus den beyden ersten Differentialien der Gleichung (1) substituirt, so erhält man

$$(A x + B'' y + B' z)^2 (A' A'' - B^2)$$
$$+ (B' x + A' y + B z)^2 (A A'' - B'^2)$$
$$+ (B' x + B y + A'' z)^2 (A A' - B''^2)$$
$$+ 2 (A x + B'' y + B' z) (B'' x + A' y + B z) (B B' - A'' B'')$$
$$+ 2 (B' x + B y + A'' z) (A x + B'' y + B' z) (B B'' - A' B')$$
$$+ 2 (B'' x + A' y + B z) (B' x + B y + A'' z) (B' B'' - A B) = o,$$

welche Gleichung also (vergl. VIII. Cap. 12. §.) für alle Werthe von x y z wahr seyn muss. Allein man bemerkt leicht, dass diese Gleichung aus den zwey Factoren besteht

$$\left.\begin{aligned} A x^2 + A' y^2 + A'' z^2 + 2 (B y z + B' x z + B'' x y) = o \\ A B^2 + A' B'^2 + A'' B''^2 - A A' A'' - 2 B B' B'' = o \end{aligned}\right\} (2),$$

welche beyden Gleichungen unabhängig von einander bestehen. Da die erste dieser beyden Gleichungen zugleich das erste Glied der Gleichung (1) ist, so folgt daraus, dass die Fläche der zweyten Ordnung developpabel ist, wenn man hat

$$C = o,$$

in welchem Falle nähmlich (Cap. VIII §. 13) die Fläche conisch ist. Sie wird aber auch developpabel seyn, wenn die zweyte der Gleichungen (2) Statt hat, d. h., wenn die Fläche (a. a. O.) cylindrisch ist.

Endlich drittens wird die Fläche der zweyten Ordnung noch developpabel seyn, wenn der vorhergehenden allgemeinen Bedingungsgleichung, unabhängig von den Werthen der Coordinaten x y z, genug geschieht, d. h., wenn man hat

$$A' A'' - B^2 = o, \quad B B' - A'' B'' = o$$
$$A A'' - B'^2 = o, \quad B' B'' - A B = o$$
$$A A' - B''^2 = o, \quad B B'' - A' B' = o$$

und da die drey letzten dieser Gleichungen eine Folge der drey ersten sind, so wird die Fläche der zweyten Ordnung developpabel seyn, wenn man hat

$$A' A'' - B^2 = o$$
$$A A'' - B'^2 = o$$
$$A A' - B''^2 = o$$

und dann ist die Gleichung (1) der Fläche der zweyten Ordnung

$$[x \sqrt{A} + y \sqrt{A'} + z \sqrt{A''}]^2 = C,$$

welche Gleichung das System von zwey einander parallelen Geraden ausdrückt, die also einen besondern Fall der cylindrischen Flächen ausmachen.

10. §. Wenn auf einer developpablen Fläche irgend eine gegebene Curve verzeichnet ist, und diese Fläche in eine Ebene developpirt wird, welches wird die Form und Lage jener Curve in dieser Ebene seyn?

Betrachtet man diese Flächen wie §. 1. I. als aus ebenen Elementen von unbestimmter Länge bestehend, die sich einander in geraden Linien schneiden, welche wir der Kürze wegen die *Seitenlinien* der developpablen Fläche nennen wollen; betrachtet man ferner die auf jener Fläche verzeichnete Curve als ein Polygon, von dem jede unendlich kleine Seite auf einem jener ebenen Elemente liegt, so ist klar, dass erstens diese Seiten des Polygons durch die Abwicklung der Fläche in eine Ebene, ihre Grösse nicht ändern, oder dass das Differential des Bogens der ursprünglichen Curve gleich dem der *geebneten* Curve ist; und dass auch zweytens die Winkel, welche diese Bogen mit den Seitenlinien bilden, in beyden Curven dieselben bleiben.

Diese zwey Bemerkungen werden hinreichen, eine dieser beyden Curven zu finden, wenn die andere gegeben ist.

Wir wollen der grössern Einfachheit wegen annehmen, dass die developpable Fläche cylindrisch sey. Sind die Gleichungen der erzeugenden Geraden $x' = a z' + \alpha$; $y' = b z' + \beta$, und bezeichnet man durch x y z die Coordinaten der auf dem Cylinder verzeichneten Curve, so hat man, da die erzeugende Gerade durch die Puncte dieser Curve gehen muss, für die Gleichung der *Seitenlinien* des Cylinders

$$x' - x = a\,(z' - z)$$
$$y' - y = b\,(z' - z).$$

Die Gleichungen der Tangente dieser auf den Cylinder verzeichneten Curve aber sind

$$x' - x = \left(\frac{dx}{dz}\right)(z' - z)$$

$$y' - y = \left(\frac{dy}{dz}\right)(z' - z).$$

Diese beyden Geraden aber schneiden sich unter einem Winkel, dessen Cosinus ist

$$\frac{a\,dx + b\,dy + dz}{m.\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}},\ \text{wo}\ m = \sqrt{1 + a^2 + b^2}.$$

Da nun die Seitenlinien des Cylinders, bey der Abwicklung desselben in eine Ebene, ihren Parallelismus beybehalten, so können sie für die Ordinaten der geebneten Curve angesehen werden. Heisst man diese Ordinate der geebneten Curve v, und ihre Abscisse ξ, so ist der Cosinus des Winkels, den die Tangente der geebneten Curve mit der Ordinate derselben bildet, gleich

$$\frac{dv}{\sqrt{d\xi^2 + dv^2}},$$

und da nach dem Vorhergehenden beyde Cosinus sowohl, als die Elemente der Bogen beyder Curven einander gleich seyn müssen, so hat man

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{a\,dx + b\,dy + dz}{m.\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}} = \dfrac{dv}{\sqrt{d\xi^2 + dv^2}}\ \text{und} \\ \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{d\xi^2 + dv^2} \end{array}\right\} \ldots (I)$$

Ist nun die auf dem Cylinder verzeichnete Curve gegeben, so kennt man ihre Gleichungen $x = \varphi z$, $y = \psi z$ und durch diese Gleichungen werden die beyden ersten Glieder der Gleichungen (I) blosse Functionen von z. Eliminirt man daher aus diesen Gleichungen (I) die Grösse z, so erhält man die gesuchte Gleichung in $\xi\ v$ für die geebnete Curve.

Ist aber die Gleichung $\upsilon = f\,\xi$ der geebneten Curve gegeben, so wird man dadurch die beyden letzten Glieder der Gleichungen I. auf blosse Functionen von ξ bringen. Eliminirt man dann aus diesen Gleichungen I. die Grösse ξ, so erhält man eine Gleichung in $x\,y\,z$, welches eine der gesuchten Gleichungen der auf den Cylinder verzeichneten Curve seyn wird; die andere wird die Gleichung des Cylinders selbst seyn, weil die Curve ganz in der Oberfläche des Cylinders liegt.

I. In dem besondern Falle, wo die geebnete Curve eine Gerade ist, ist

$$\frac{d\upsilon}{\sqrt{d\xi^2 + d\upsilon^2}}$$

eine beständige Grösse C, so dass die Gleichung der auf den Cylinder gewickelten Geraden d. h. die Gleichung der *Schraubenlinie* ist,

$$\frac{a\,dx + b\,dy + dz}{m\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}} = C.$$

II. Sind die Seitenlinien des Cylinders senkrecht auf die Ebene der $x\,y$, so hat man $a = b = o$, also die Gleichungen (I)

$$\frac{dz}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}} = \frac{d\upsilon}{\sqrt{d\xi^2 + d\upsilon^2}}$$

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\xi^2 + d\upsilon^2,$$

woraus folgt

$$\left.\begin{array}{c} dx^2 + dy^2 = d\xi^2 \\ z = \upsilon \end{array}\right\} \text{(II).}$$

Sey also $y = \varphi x$ die Gleichung des Schnittes des Cylinders mit der horizontalen Ebene der $x\,y$, welches zugleich die Gleichung des Cylinders selbst ist, und sey $z = \psi x$ die Gleichung der Projection der auf den Cylinder gewickelten Curve, so ist

$$dx\sqrt{1 + \left(\frac{d.\varphi x}{dx}\right)^2} = d\xi$$

$$\psi x = \upsilon.$$

und die Elimination von x aus diesen beyden Gleichungen gibt die gesuchte Gleichung der geebneten Curve in $\xi\ \upsilon$.

Ex. Ist $y = \varphi x = \sqrt{r^2 - x^2}$ und

$$z = \psi x = a \text{ Arc. Sin } \frac{x}{r} + b,$$

so sind die beyden letzten Gleichungen

$$\frac{r\,dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = d\xi$$

$$a \text{ Arc. Sin } \frac{x}{r} + b = \upsilon,$$

oder wenn x mit ξ verschwindet,

$$\text{Sin} \frac{\xi}{r} = \frac{x}{r}$$

$$\text{Sin} \frac{\upsilon - b}{a} = \frac{x}{r},$$

also die Gleichung der geebneten Curve

$$\frac{\xi}{r} = \frac{\upsilon - b}{a}.$$

Ist aber $\upsilon = f\xi$ die gegebene Gleichung der geebneten Curve, und wie zuvor $y = \varphi x$ die Gleichung des horizontalen Schnittes des Cylinders, so sind die Gleichungen (II)

$$dx.\sqrt{1 + \left(\frac{d.\varphi x}{dx}\right)^2} = d\xi$$

$$z = f\xi$$

und die Elimination von ξ aus diesen beyden Gleichungen gibt die gesuchte Gleichung der aufgewickelten Curve.

Ex. Ist $y = \varphi x = \sqrt{r^2 - x^2}$ und die Gleichung der geebneten Geraden $\frac{\xi}{r} = \frac{\upsilon - b}{a}$ so sind die beyden letzten Gleichungen

$$\frac{r\,dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = d\xi$$

$$z = \frac{a\xi}{r} + b,$$

also wenn man integrirt und ξ eliminirt,

$$z = a \text{ Arc. Sin } \frac{x}{r} + b, \text{ wie zuvor.}$$

Ist die geebnete Curve eine Parabel $v^2 = a\xi$, und die Gleichung des Cylinders $y = \varphi x = \sqrt{r^2 - x^2}$, so erhält man, wenn wieder x mit ξ verschwindet, für die Gleichungen der aufgewickelten Curve

$$z^2 = a r \text{ Arc. Sin } \frac{x}{r}$$

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

11. §. Betrachtet man eben so die conischen Flächen, und nimmt $\alpha\ \beta\ \gamma$ für die Coordinaten des Scheitels des Kegels, und x y z für die Coordinaten der auf dem Kegel verzeichneten Curve; so sind die Gleichungen der *Seitenlinien* des Kegels, da sie durch den Scheitel und durch die Curve gehen müssen,

$$x' - \alpha = \left(\frac{x - \alpha}{z - \gamma}\right) . (z' - \gamma)$$

$$y' - \beta = \left(\frac{y - \beta}{z - \gamma}\right) . (z' - \gamma),$$

also auch der Cosinus des Winkels dieser Seitenlinien des Kegels mit der Tangente der auf den Kegel verzeichneten Curve

$$\frac{(x - \alpha)\, dx + (y - \beta)\, dy + (z - \gamma)\, dz}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} . \sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2}},$$

oder was dasselbe ist

$$\frac{d . \sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2}}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}.$$

Diese Seitenlinien des Kegels werden in der Ebene der Abwicklung zu Radien, deren gemeinschaftlicher Anfangspunct die Spitze des Kegels ist.

Nennt man die *Polarcoordinaten* der geebneten Curve r und v, wo r die Distanz der Curve vom Scheitel des Kegels, und v der Winkel dieser Distanz mit

einer gegebenen Geraden ist, so ist das Element des Bogens der geebneten Curve gleich $\sqrt{dr^2 + r^2 dv^2}$, also hat man

$$\left.\begin{array}{r}(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = r^2 \text{ und} \\ dx^2 + dy^2 + dz^2 = r^2 dv^2\end{array}\right\} \text{(III)}$$

und diese beyden Gleichungen wird man wie die Gleichungen I und II behandeln können.

Eilftes Capitel.

Evoluten der krummen Linien.

1. §. Als wir im Capitel IV. den Kreis suchten, der mit einer gegebenen krummen Linie eine Berührung der zweyten Ordnung hat, fanden wir für die Abscisse a und Ordinate b des Mittelpunctes dieses Kreises, und für den Halbmesser r desselben die Ausdrücke

$$a = x - \frac{dy}{dx} \cdot \frac{(dx^2 + dy^2)}{d^2y}$$

$$b = y + \frac{dx^2 + dy^2}{d^2y}$$

$$r = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{d^2y \cdot dx},$$

wenn dx constant vorausgesetzt wird.

Substituirt man in den beyden ersten Ausdrücken für y, dy und d^2y ihre Werthe in x aus der Gleichung der gegebenen krummen Linie, so erhält man die Werthe der Coordinaten a, b des Mittelpunctes des Krümmungskreises als Functionen von x. Eliminirt man daher aus diesen beyden ersten Gleichungen die Grösse x, welche den Punct particularisirt, den man auf der gegebenen Curve betrachtet, so erhält man die Relation, welche zwischen den Grössen a und b für *alle* Puncte der gegebenen Curve Statt hat, oder man erhält die Curve, in welcher alle Mittelpuncte der Krümmung der ersten gegebenen Curve liegen. Man nennet diese Curve der Mittelpuncte, die *Evolute* der gegebenen Curve, diese gegebene Curve selbst aber die Evolvente von jener.

Sey die gegebene Curve die Apollonische Parabel

$$y^2 = px,$$

also auch

$$dy = \frac{p\,dx}{2y} \text{ und } d^2y = -\frac{p^2\,dx^2}{4y^3}$$

$$a = 3x + \frac{p}{2},\ b = -\frac{4x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{p}},\ r = \frac{(4x+p)^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{p}},$$

und daher die Gleichung der Evolute

$$b^2 = \frac{16}{27p}(a - \tfrac{1}{2}p)^3,$$

oder wenn man den Anfang der Abscissen verändert, und

$$a - \frac{p}{2} = a' \text{ setzt},$$

$$b^2 = \frac{16}{27p} \cdot a'^3,$$

also ist die Neil'sche Parabel die Evolute der Apollonischen Parabel.

Ist die gegebene Curve die Cyclois,

$$y = \sqrt{2px - x^2} + \text{Arc Sin vers } x,$$

so hat man

$$dy = dx\sqrt{\frac{2p-x}{x}} \text{ und } d^2y = -\frac{p\,dx^2}{x\sqrt{2px-x^2}},$$

$$a = 4p - x,\ b = \text{Arc Sin vers}.x - \sqrt{2px - x^2},$$

$$r = 2\sqrt{4p^2 - 2px},$$

und daher die Gleichung der Evolute

$$b = \text{Arc Sin vers}(4p-a) - \sqrt{2p(4p-a) - (4p-a)^2},$$

welches wieder dieselbe Cyclois mit der gegebenen, aber in verkehrter Lage, ist.

I. Wäre umgekehrt die Gleichung $b = \varphi a$ der Evolute gegeben, so würde man aus den beyden Gleichungen

$$a = x - \frac{dy}{dx} \cdot \frac{(dx^2 + dy^2)}{d^2y}$$

$$\varphi a = y + \frac{dx^2 + dy^2}{d^2y}$$

die Grösse a eliminiren, und dadurch die Differentialgleichung der zweyten Ordnung in $x\,y$ für die andere Curve erhalten, von welchen $b = \varphi\alpha$ die Evolute ist.

Doch kann man auch ohne Integralrechnung zu demselben Zwecke auf folgendem Wege kommen.

Die vorhergehenden Werthe von a, b und r hat man (Capitel IV.) aus der Gleichung

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

und ihren zwey Differentialgleichungen

$$(x-a)\,dx + (y-b)\,dy = o$$

$$dx^2 + dy^2 + (y-b)\,.\,d^2y = o$$

in Beziehung auf x und y abgeleitet.

Wenn man aber im Vorhergehenden die Coordinaten a, b der Evolute und die Grösse r als Functionen der Coordinaten x, y der gegebenen Curve betrachtet hat, so kann man auch umgekehrt die Grössen x, y als Functionen von a, b, c betrachten. Differentiirt man also unter dieser Voraussetzung die zwey ersten der vorhergehenden Gleichungen, indem man alle Grössen x, y, a, b und r als veränderlich annimmt, so erhält man

$$(x-a)\,da + (y-b)\,db + r\,dr = o \text{ und}$$

$$da\,dx + db\,dy = o.$$

Also auch, wenn man den letzten Werth von

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{da}{db}$$

in der zweyten der vorhergehenden Gleichungen substituirt

$$(x-a)\,db - (y-b)\,da = o.$$

Aus dieser und der vorvorletzten Gleichung folgt

$$\left.\begin{aligned} x - a &= \frac{r\,da}{\sqrt{da^2 + db^2}} \\ y - b &= \frac{r\,db}{\sqrt{da^2 + db^2}} \end{aligned}\right\} \text{I},$$

und endlich

$$dr = \sqrt{da^2 + db^2}.$$

Substituirt man aber in den Gleichungen I für b den Werth dieser Grösse $b = \varphi\, a$ aus der gegebenen Gleichung der Evolute, und eliminirt dann aus den beyden Gleichungen I die Grösse a, so erhält man die gesuchte Gleichung in x y für die Evolvente.

II. Die letzte Gleichung

$$dr^2 = da^2 + db^2$$

zeigt, dass das Differential d r des Krümmungshalbmessers der Evolvente gleich ist dem Differential des Bogens

$$ds = \sqrt{da^2 + db^2}$$

der Evolute. Dieselbe Gleichheit, die constante Grösse der Integration ausgenommen, wird also auch zwischen den endlichen Grössen r und s Statt haben.

Weiter geben die beyden Gleichungen

$$(x - a)\,dx + (y - b)\,dy = 0$$

$$da\,dx + db\,dy = 0$$

durch die Elimination der Grösse $\frac{dy}{dx}$ folgende

$$y - b = \frac{db}{da} \cdot (x - a),$$

welches die Gleichung einer Tangente der Evolute ist, die durch den Punct der Evolvente geht, dessen Coordinaten x und y sind, einer Tangente, die mit dem Krümmungshalbmesser der Evolvente zusammen fällt.

Da also der Krümmungshalbmesser der Evolvente in der Tangente der Evolute liegt, und da bis auf eine

willkührliche Constante jener Krümmungshalbmesser gleich dem entsprechenden Bogen der Evolute ist, so wird das Ende eines um die Evolute gelegten Fadens, wenn man ihn so abwickelt, dass das von der Curve getrennte Stück des Fadens immer Tangente zu der Evolute ist, während dieser Abwickelung die Evolvente beschreiben, woraus sich zugleich diese Benennung beyder Curven erklärt.

Da man den beschreibenden Punct wo immer auf der beweglichen Tangente der Evolute nehmen kann, so werden zu derselben Evolute unzählige Evolventen gehören. In der That ist $r = s + c$, wo c eine willkührliche Constante, und nach dem Vorhergehenden

$$ds^2 = da^2 + db^2,$$

so sind die Gleichungen I

$$\left.\begin{aligned} x - a &= (s + c)\frac{da}{ds} \\ y - b &= (s - c)\frac{db}{ds} \end{aligned}\right\}$$

welche verbunden mit der gegebenen Gleichung $b = \varphi a$ der Evolute nach der Elimination von a und b die Gleichung der Evolvente zwischen x und y und c geben werden, eine Gleichung, die verschiedenen Curven zugehören wird, nachdem c verschiedene Werthe erhält.

III. Auf eine ähnliche Art wird man auch für Curven von doppelter Krümmung verfahren können. Sind nähmlich a, b, c die Coordinaten des Mittelpunctes des Krümmungskreises einer Curve von doppelter Krümmung, so hat man Capitel V. §. 9., wenn d s constant angenommen wird,

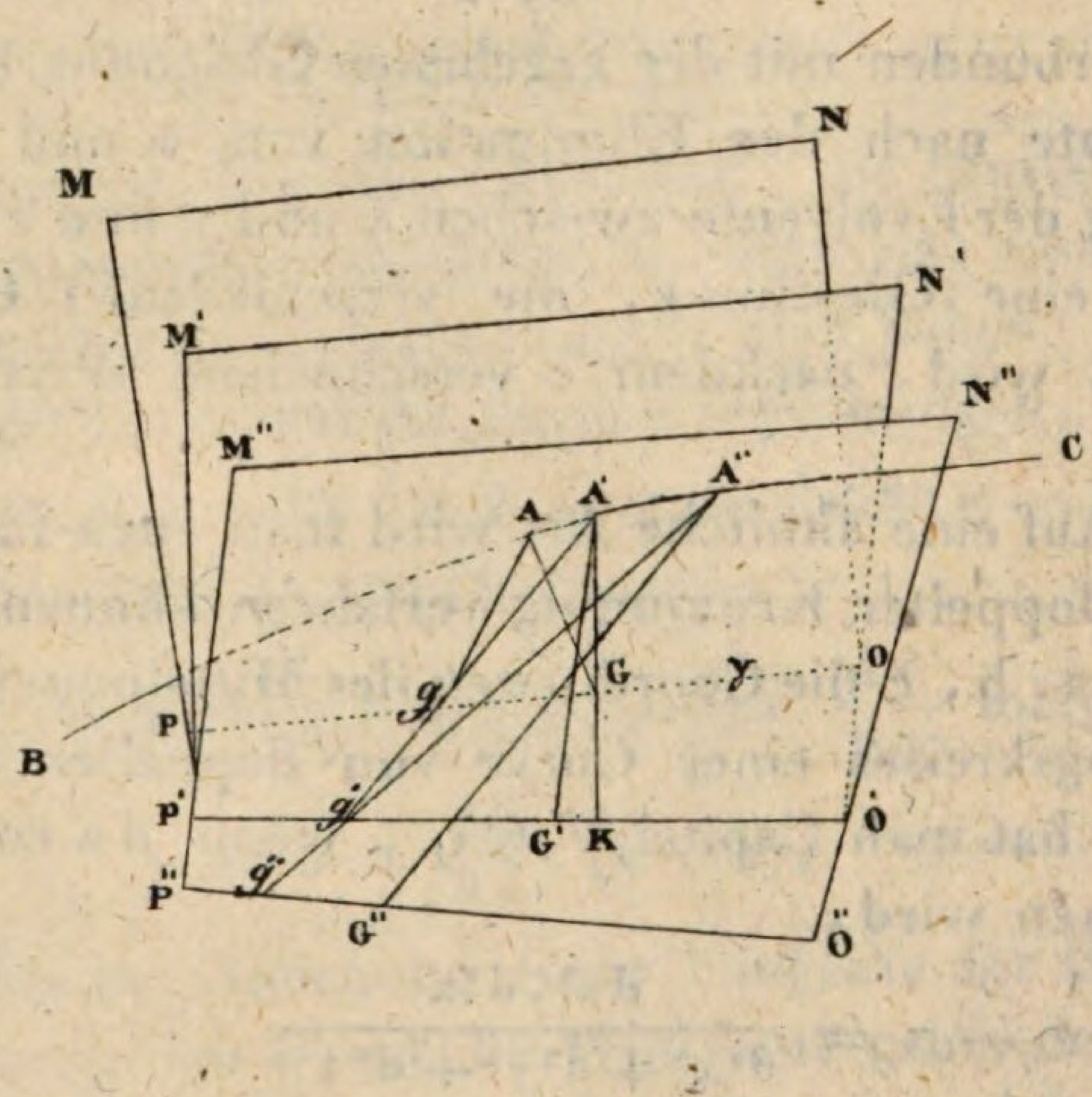
$$a - x = \frac{ds^2 . d^2x}{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2}$$

$$b - y = \frac{ds^2 . d^2y}{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2}$$

$$c - z = \frac{ds^2 . d^2z}{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2}.$$

Eliminirt man dann aus diesen drey Gleichungen und den beyden Gleichungen einer gegebenen Curve die drey Grössen x, y, z, so erhält man die zwey Gleichungen in a, b, c, welche für die Curve gehören, die alle Mittelpuncte der Krümmung der gegebenen Curve enthält. Allein diese Curve der Krümmungsmittelpuncte wird keine Evolute der gegebenen Curve seyn, dieses Wort in der Bezeichnung von Nro. II. genommen, oder die gegebene Curve wird nicht durch Abwickelung von der Curve der Krümmungsmittelpuncte erzeugt werden können, weil im Allgemeinen keine Tangente der letzten durch die erste Curve geht, den einzigen besondern Fall ausgenommen, wo die gegebene Curve eine *ebene* Curve ist, wie wir bald näher sehen werden.

2. §. Die vorhergehenden Betrachtungen lassen sich nähmlich mit Monge noch auf eine andere, viel allgemeinere Art, anstellen.



Sey B A A′ A″...... eine Curve von doppelter Krümmung. Durch einen Punct A derselben gehe die

Ebene M N O P senkrecht auf die Tangente der Curve in A; durch den unendlich nahen Punct A′ gehe die Ebene M′ N′ O P senkrecht auf die Tangente in A′; durch A″ die Ebene M″ N″ P′ O′ senkrecht auf die Tangente in A″ u. s. w.

Diess vorausgesetzt, werden sich die beyden ersten Ebenen irgendwo in einer geraden Linie P O schneiden, und diese Gerade P O wird als die Achse eines Kreises betrachtet werden können, von der das Element A A′ der Curve ein Theil ist.

Zieht man daher durch A und A′ die Geraden A G und A′ G jede senkrecht auf P O, so werden diese Geraden einander gleich seyn, und sich in einem Puncte G schneiden, welcher der Mittelpunct jenes Kreises A A′ ist. Alle andern Puncte der Achse, wie g, γ.... werden von allen Puncten des Elements A A′ gleich weit abstehen, und also als die Pole jenes Kreises angesehen werden können. Um daher die Krümmung der Curve A A′ A″.... in dem Puncte A zu bestimmen, wird man die Grösse des Krümmungshalbmessers A G = A′ G suchen müssen, und um die Richtung dieser Krümmung zu bestimmen, wird man den Ort des Punctes G im Raume, oder vielmehr in der Linie P O suchen müssen. Um aber bloss das Element A A′ selbst im Raume zu beschreiben, wird man bloss irgend eine der Geraden A G, A g, A γ.... um die Achse P O so drehen, dass dabey der Winkel A G O, A g O, A γ O.. nicht geändert wird.

Daraus folgt also, dass die Durchschnittslinie P O der beyden auf das Element A A′ senkrechten Ebenen, der Ort aller Pole dieses Elements ist, dass der Mittelpunct G der Krümmung dieses Elements, derjenige aller jener Pole ist, der dem Elemente am nächsten steht, und endlich dass der Halbmesser der Krümmung A G = A′ G das Loth ist, welches von dem Elemente A A′ auf die Linie der Pole gezogen wird.

Eben so wird, wenn man diess auf die folgenden Elemente fortsetzt, die Durchschnittslinie P′ O′ der zweyten und dritten Ebene der Ort der Pole des Elements A′ A″ seyn, so wie die auf P′ O′ senkrechten Linien A′ G′, A″ G′ die Krümmungshalbmesser, und G′ der Mittelpunct der Krümmung des Elements A′ A″ seyn wird u. s. w. Endlich wird das System aller dieser Durchschnittslinien P O, P′ O′, P″ O″ eine Fläche bilden, welche Fläche der Ort aller Pole der Curve B A C seyn wird, so dass diese Curve keinen Pol hat, der nicht auf der Fläche wäre, und dass diese Fläche keinen Punct hat, der nicht der Pol irgend eines Elementes der Curve wäre. Diese Fläche wird offenbar developpabel seyn (Capitel X.), weil sie nur aus unendlich schmalen und unbestimmt langen Ebenen P O O′ P′, P′ O′ O″ P″ ... bestehet, und daher je zwey nächste Lagen der erzeugenden Linie, wie P O, P′ O′ oder P′ O′, P″ O″ sich irgendwo in einem Puncte schneiden müssen.

3. §. Man ziehe durch den Punct A in der ersten Ebene M N O P eine Gerade A g nach irgend einem willkührlichen Puncte g der ersten Durchschnittslinie P O, durch A′ und g in der zweyten Ebene M′ N′ O P die Gerade A′ g, und verlängere A′ g, bis sie der zweyten Durchschnittslinie P′ O′ in dem Puncte g′ begegnet; durch A″ und g′ eben so die Gerade A″ g′ in der dritten Ebene, die verlängert der dritten Durchschnittslinie begegnet; durch A″ und g′ eben so die Gerade A″ g′ in der dritten Ebene, die verlängert der dritten Durchschnittslinie P″ O″ in g″ begegnet u. f., so erhält man eine Curve g g′ g″, welche folgende Eigenschaften hat.

1. Alle Geraden A g, A′ g′, A″ g″ sind Tangenten dieser Curve, weil sie die Verlängerung der Elemente dieser Curve sind.

2. Wenn die erste A g sich um den Punct g dreht, bis sie mit der zweyten A′ g zusammen fällt, so hat sie während dieser Bewegung nicht aufgehört Tangente

der Curve zu seyn, und ihr Endpunct A wird während dieser Bewegung das Element A A′ der Curve B A C durchlaufen. Dasselbe gilt von der zweyten Linie A′ g′, wenn sie sich um den Punct g′ dreht, woraus also folgt, dass die Curve g g′ g″.... die Evolute der Curve B A C ist, oder dass die Abwickelung eines über die Curve g g′ g″...... gespannten Fadens die Evolvente B A C erzeugt. Da aber die Richtung der ersten Tangente A g willkührlich ist, so hat jede Curve B A C eine unendliche Anzahl von Evoluten, und alle diese Evoluten liegen in der developpablen Fläche, welche der Ort der Pole der gegebenen Curve B A C ist.

Da endlich alle Ebenen M N O P.... zu der developpablen Fläche tangirende Ebenen sind, weil jede dieser unendlich schmalen Ebenen als die Verlängerung eines der Elemente der developpablen Fläche betrachtet werden kann, so ist auch die Gerade A g in allen ihren Lagen eine Tangente zu der developpablen Fläche, weil sich diese Gerade immer in irgend einer jener unendlich schmalen Ebenen befindet.

4. §. Da bey einer Curve von doppelter Krümmung drey nächste Tangenten nicht in *einer* Ebene seyn können, so können auch von drey nächsten normalen Ebenen einer solchen Curve die Durchschnitte P O der ersten und zweyten, und P′ O′ der zweyten und dritten, unter einander nicht parallel seyn.

Es war A G senkrecht auf O P; A′ G′ senkrecht auf O′ P′; A″ G″ senkrecht auf O″ P″...., also ist auch A′ G senkrecht auf O P, und wenn man A′ G bis k verlängert, so kann A′ G k nicht mehr senkrecht auf O′ P′ seyn, also muss die Linie A′ G k von der auf O′ P′ senkrechten A′ G′ verschieden seyn, also begegnen auch die zwey nächsten Krümmungshalbmesser A G, A′ G′ der Curve B A C der Geraden P O nicht in demselben Puncte. Aber da zwey Gerade, die in verschiedenen Ebenen liegen, sich nur in der gemeinschaftlichen Durchschnitts-

linie P O dieser Ebene begegnen können, so begegnen sich die Krümmungshalbmesser A G, A′ G′ gar nicht, und liegen also auch nicht in *einer* Ebene. Dasselbe gilt von dem zweyten und dritten Halbmesser A′ G′, A″ G″.... u. f., woraus folgt, dass diese Halbmesser A G, A′ G′, A″ G″.... nicht die auf einander folgenden Tangenten irgend einer Curve seyn können, weil zwey nächste Tangenten einer jeden Curve immer in einer und derselben Ebene liegen müssen, und eben so wenig wird eine Gerade durch die zwey Puncte G und G′, d. h., eine Tangente der Curve G G′ G″... durch die Curve B A C gehen können, also kann auch die Curve der Mittelpuncte G G′ G″.... keine Evolute der gegebenen Curve B A C seyn, den einzigen besondern Fall ausgenommen, wo die Curve B A C eine ebene Curve ist, wo dann alle Geraden O P, O′ P′.... senkrecht auf die Ebene der Curve, also unter einander parallel seyn werden (§. 1. Nro. III.).

Jede Curve von einfacher oder doppelter Krümmung hat also eine unendliche Anzahl von Evoluten, die alle von doppelter Krümmung sind, mit Ausnahme einer einzigen Evolute für ebene Curven, die ebenfalls nur eine einfache Krümmung hat. Die Evoluten der ebenen Curve liegen nähmlich alle auf der Oberfläche eines Cylinders, dessen Basis jene einzige Evolute von einfacher Krümmung ist, und die in der Ebene der gegebenen Curve liegt, während die andern Evoluten auf dem Cylinder alle eine doppelte Krümmung haben.

5. §. Die Gleichungen einer Curve von doppelter Krümmung $x = \varphi z$, $y = \psi z$ seyen gegeben.

Man suche die developpable Fläche, welche der Ort aller Evoluten jener Curve ist.

Nach dem Vorhergehenden ist die Gleichung der Ebene, welche durch den Punct der Curve, der zu den Coordinaten

$$z = \alpha,\ y = \psi\,\alpha,\ x = \varphi\,\alpha$$

gehört, senkrecht auf die Tangente der Curve in diesem Puncte geht,

$$(y-\psi\alpha)\psi'\alpha+(x-\varphi\alpha)\varphi'\alpha+z-\alpha=0\ldots(II).$$

Eben so wird die Gleichung der auf die Curve in dem nächstfolgenden Puncte $\alpha+d\alpha$ normalen Ebene seyn

$$[y-\psi(\alpha+d\alpha)]\psi'(\alpha+d\alpha)+[x-\varphi(\alpha+d\alpha)]\varphi'(\alpha+d\alpha)$$
$$+z-(\alpha+d\alpha)=0\ldots\ldots(III).$$

Und wenn man in diesen beyden Gleichungen die Werthe von x y z einander gleich setzt, so hat man die beyden Gleichungen der Durchschnittslinie jener zwey nächsten normalen Ebenen. Oder auch, wenn man (II) von (III) subtrahirt, und die Differentialien der zweyten Ordnung weglässt, so sind die Gleichungen jener Durchschnittslinie, wenn man der Kürze wegen die α nach den φ' und ψ' weglässt,

$$(y-\psi\alpha)\psi'+(x-\varphi\alpha)\varphi'+z-\alpha=0\ldots.(II)$$
$$(y-\psi\alpha)\psi''+(x-\varphi\alpha)\varphi''-[1+(\varphi')^2+(\psi')^2]=0\,..\,IV,$$

wo offenbar IV das Differential von (II) in Beziehung auf α ist. Diese Durchschnittslinie der beyden nächsten normalen Ebenen liegt ganz in der gesuchten developpablen Fläche, sie ist die erzeugende Linie dieser Fläche, also ist auch das Resultat der Elimination von α aus den beyden Gleichungen (II), (IV) die gesuchte Gleichung der developpablen Fläche.

I. Von diesen geraden Durchschnittslinien je zwey nächster normalen Ebenen schneiden sich selbst je zwey nächste in irgend einem Puncte, wenn die developpable Fläche kein Cylinder ist. Aber drey nächst folgende Durchschnittslinien werden sich nur dann in demselben Puncte schneiden, wenn die developpable Fläche ein Kegel ist. Die Aufeinanderfolge der Puncte, in welchen sich je zwey nächste Durchschnittslinien der normalen Ebenen schneiden, wird die Wendungscurve (Capitel VII.) der developpablen Fläche seyn. Diese Wendungscurve reicht hin, die developpable Fläche zu bestimmen, weil diese Fläche nichts anders,

als der Ort aller Tangenten jener Curve ist, und diese Wendungscurve ist zugleich die Gränze der developpablen Fläche, weil keine jener Geraden, aus denen die Fläche besteht, auf die Seite kommen kann, wo diese Curve concav ist. So bilden alle Tangenten einer Schraubenlinie eine developpable Fläche, die sich auf der äussern convexen Seite der Schraubenlinie ringsum nach unzähligen Wendungen ins Unendliche verbreitet, die aber nie in das Innere des Cylinders treten kann, auf welchem die Schraubenlinie verzeichnet ist, so dass die Schraubenlinie als die Gränze jener developpablen Fläche betrachtet werden muss.

6. §. Der Punct der ersten Geraden, deren Gleichungen (II), (IV) sind, in welcher sie von der nächstfolgenden Geraden geschnitten wird, wird derjenige seyn, für welchen die Grössen $x\,y\,z$ sich nicht ändern, während sich α ändert, und in $\alpha + d\alpha$ übergeht. Differentiirt man also jene zwey Gleichungen in Beziehung auf α, so erhält man

$$(y - \psi\alpha)\psi' + (x - \varphi\alpha)\varphi' + z - \alpha = o \ldots (II)$$
$$(y - \psi\alpha)\psi'' + (x - \varphi\alpha)\varphi'' - [1 + (\varphi')^2 + (\psi')^2] = o \ldots (IV)$$
$$(y - \psi\alpha)\psi''' + (x - \varphi\alpha)\varphi''' - 3[\varphi'.\varphi'' + \psi'.\psi''] = o \ldots (V),$$

und diese drey Gleichungen sind die des gesuchten Durchschnittspunctes zweyer nächster Durchschnittslinien der auf die gegebene Curve normalen Ebenen. Also sind auch die zwey Gleichungen in x, y, z, die man erhält, wenn man aus (II), (IV), (V) die Grösse α eliminirt, die Gleichung des Systems aller jener Durchschnittspuncte, oder die Gleichung der Wendungscurve der developpablen Fläche, welche der Ort aller Evoluten der gegebenen Curve

$$x = \varphi z,\ y = \psi z$$

ist. Diese Wendungscurve ist aber keine der Evoluten der gegebenen Curve, obschon sie, wie alle Evoluten derselben in der developpablen Fläche liegt, weil keine der Tangenten der Wendungscurve durch die gegebene

Curve gehen kann, indem alle diese Tangenten in der developpablen Fläche liegen.

7. §. Die Gleichungen einer Curve von doppelter Krümmung

$$x = \varphi z,\ y = \psi z$$

sind gegeben. Man suche die Evoluten derselben.

Da alle Evoluten der gegebenen Curve in der developpablen Fläche liegen, deren Gleichung das Resultat der Elimination von α aus den beyden Gleichungen (II), (IV) ist, so ist diese Gleichung der developpablen Fläche zugleich eine der zwey gesuchten Gleichungen der Evolute. Um auch die zweyte zu finden, erinnern wir uns, dass die Tangente der Evolute verlängert, die gegebene Curve in einem Puncte treffen soll, dessen Coordinaten α, $\varphi\alpha$, $\psi\alpha$ sind, oder was dasselbe ist, dass die Tangente der Projection der Evolute in einer der drey coordinirten Ebenen durch die Projection des Punctes der gegebenen Curve gehen soll, dessen Coordinaten α, $\varphi\alpha$, $\psi\alpha$ sind. Also ist in Beziehung auf die Projection in der Ebene der xz

$$z - \alpha = (x - \varphi\alpha) \cdot \frac{dz}{dx},$$

oder in Beziehung auf die beyden andern coordinirten Ebenen

$$z - \alpha = (y - \psi\alpha) \cdot \frac{dz}{dy}$$

$$x - \varphi\alpha = (y - \psi\alpha) \cdot \frac{dx}{dy}.$$

Verbindet man eine dieser drey Gleichungen mit den beyden (II), (IV), und eliminirt aus ihnen die Grösse α, so erhält man die zwey Gleichungen in xyz für die gesuchte Evolute.

Eine von diesen beyden Gleichungen ist eine Differentialgleichung der ersten Ordnung, deren Integration also eine willkührliche Constante einführen wird, und durch die verschiedenen Werthe, welche diese

Constante annehmen kann, werden *alle* gesuchten Evoluten der gegebenen Curve bestimmt werden.

8. §. Allein so allgemein auch die vorhergehenden Betrachtungen in Beziehung auf die viel einfacheren des §. 1. sind, so sind sie doch nur wieder besondere Fälle von andern noch viel allgemeineren Untersuchungen. Bisher haben wir nähmlich die Eigenschaften der Curven durch die Betrachtung von geraden Linien und Ebenen untersucht, welche jene Curven entweder berühren, oder auf ihnen senkrecht stehen. Um z. B. die Curve der Krümmungsmittelpuncte einer gegebenen Curve von einfacher Krümmung zu finden, hatten wir bloss die Curve zu suchen, welche von allen auf einander folgenden Durchschnittspuncten je zwey nächster Normalen der gegebenen Curve gebildet wird. Die Gleichung der Normale zwischen den veränderlichen Coordinaten a und b ist

$$a - x + (b - y) \cdot \frac{dy}{dx} = 0,$$

und diese Gleichung in Beziehung auf x und y differentiirt, gibt

$$dx^2 + dy^2 - (b - y) \cdot d^2y = 0.$$

Sucht man aus diesen beyden Gleichungen die Werthe von a und b, so erhält man

$$a = x - \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx^2 + dy^2}{d^2y}$$

$$b = y + \frac{dx^2 + dy^2}{d^2y},$$

welche Ausdrücke dieselben mit denen des §. 1. sind. Verbindet man daher diese beyden Gleichungen mit der Gleichung $y = \varphi x$ der gegebenen Curve, und eliminirt aus ihnen die Grössen x und y, so erhält man in a, b die gesuchte Gleichung der Curve der Krümmungsmittelpuncte, wie aus dem Vorhergehenden bekannt ist.

Wir wollen nun auf eine ähnliche, aber viel allgemeinere Art, durch alle Puncte einer gegebenen ebenen Curve, in der Ebene dieser Curve gerade Linien ziehen, welche alle die Curve unter einem gegebenen Winkel ω schneiden. Die auf einander folgenden Puncte, in welchen sich je zwey dieser Geraden schneiden, werden eine Curve bilden, zu welcher alle jene Geraden Tangenten sind. Wir wollen diese Curve die Evolutoide der gegebenen Curve nennen.

Die Evolutoide wird also in die Evolute der gegebenen Curve übergehen, wenn ω ein rechter Winkel ist.

Sey $y = \varphi x$ die Gleichung der gegebenen Curve, so wird die Gleichung der geraden Linie, welche die Curve in dem Punte

$$x = \alpha,\ y = \varphi \alpha$$

berührt, seyn

$$y - \varphi\alpha = (x - \alpha) \,.\, \varphi',$$

wo der Kürze wegen

$$\varphi' = \left(\frac{d \,.\, \varphi \alpha}{d \alpha}\right)$$

ist. Endlich wird die Gleichung jeder andern Curve, die durch denselben Punct der gegebenen Linie geht, die Form haben

$$y - \varphi\alpha = A \,.\, (x - \alpha),$$

wo A eine constante Grösse ist.

Soll die zweyte Gerade mit jener Tangente den Winkel ω bilden, so wird man, da die Tangente mit der Achse der x den Winkel macht, dessen trigonometrische Tangente φ' ist, für den Werth von A haben

$$A = \frac{\varphi' \pm \operatorname{tg} \omega}{1 \pm \varphi' \cdot \operatorname{tg} \omega}.$$

Also ist die Gleichung der Geraden, oder vielmehr, da es immer zwey Geraden gibt, die einer Curve in

einem gegebenen Puncte unter einem gegebenen Winkel begegnen, so ist die Gleichung der zwey Geraden, welche die gegebene Curve $y = \varphi x$ in dem Puncte $x = \alpha$ unter dem Winkel ω schneiden,

$$\pm \operatorname{tg} \omega \, [(x - \alpha) + (y - \varphi \alpha) . \varphi'] = (y - \varphi \alpha) - (x - \alpha) . \varphi'.$$

Differentiirt man diese Gleichung in Beziehung auf α, so hat man

$$\pm \operatorname{tg} \omega \, [(y - \varphi \alpha) \varphi'' - (1 - \varphi'^2)] = -(x - \alpha) . \varphi'',$$

und die Elimination von α, aus diesen beyden Gleichungen wird die gesuchte Gleichung der Evolutoide geben. Man erhält auf diese Art so viele Evolutoiden, als man der Grösse ω zwischen 0° und 90° verschiedene Werthe gibt, und von diesen zwey äussersten Gränzen gibt $\omega = 0$ zur Evolutoide die gegebene Gleichung $y = \varphi x$ selbst wieder, und $\omega = 90$ gibt die bisher betrachtete Evolute.

I. Sucht man aus den beyden vorhergehenden Gleichungen die Werthe von x und y, so gehören diese x und y für den Durchschnittspunct zweyer nächsten Geraden. Die Distanz dieses Punctes von dem Puncte der gegebenen Curve, für welchen $x = \alpha$ ist, soll r, der Krümmungshalbmesser der gegebenen Curve aber R seyn, so ist

$$r^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \varphi \alpha)^2$$

und wenn man in der letzten Gleichung die Werthe von $(x - \alpha)$ und $(y - \varphi \alpha)$ aus den beyden ersten substituirt, so erhält man

$$r = \frac{(1 + \varphi'^2)^{\frac{3}{2}}}{\varphi''} \operatorname{Sin} \omega,$$

also auch

$$r = R . \operatorname{Sin} \omega.$$

Wir wollen diese Grösse r, oder den Theil der Tangente der Evolutoide zwischen dieser und der gegebenen Curve den Radius der Evolutoide nennen.

II. Nimmt man an, dass die Grösse α constant ist, und gibt man dafür der Grösse ω alle auf einander folgenden Werthe, so erhält man nach der Reihe für denselben Punct der gebenen Curve $y = \varphi x$ die Endpuncte aller Radien der verschiedenen Evolutoiden, d. h. eliminirt man die Grösse ω aus jenen zwey ersten Gleichungen, so erhält man die Gleichung der Curve, welche durch alle Endpuncte der Radien aller Evolutoiden geht, während die Radien alle aus einem Puncte der gegebenen Curve kommen. Diese Elimination von ω gibt

$$[(x - \alpha)^2 + (y - \varphi\alpha)^2] \cdot \varphi'' = (1 - \varphi'^2) \cdot [(y - \varphi\alpha) - (x - \alpha) \cdot \varphi'].$$

Nimmt man an, dass der Anfangspunct der Coordinaten in jenem Puncte der gegebenen Curve ist, und dass die Tangente derselben zugleich die Achse der x ist, so hat man

$$\alpha = \varphi\alpha = \varphi' = 0, \text{ und } \varphi'' = \frac{1}{R},$$

also geht die letzte Gleichung in folgende über

$$x^2 + y^2 = R \cdot y,$$

welche die Gleichung eines Kreises ist, dessen Durchmesser gleich dem Krümmungshalbmesser R der gegebenen Curve ist.

9. §. Um die Gleichung der developpablen Fläche zu finden, welche der Ort aller Evoluten einer gegebenen Curve ist, haben wir §. 5. die Gleichung einer auf die Curve in dem Puncte $z = \alpha$, $y = \psi\alpha$, $x = \varphi\alpha$ normalen Ebene gesucht und diese Gleichung in Beziehung auf α differentiirt; das Resultat der Elimination von α aus den beyden so erhaltenen Gleichungen gab die gesuchte Gleichung der developpablen Fläche.

Eben so wollen wir hier die Gleichung eines Kegels von kreisförmiger Basis suchen, dessen Seitenlinien mit der Achse des Kegels den Winkel ω bilden, des-

sen Scheitel immer auf der gegebenen Curve $y = \varphi x$ bleibt, und dessen Achse endlich immer Tangente zu dieser Curve ist. Denn es ist klar, dass während der Bewegung dieses Kegels jede Seitenlinie desselben eine developpable Fläche beschreiben wird, und dass die erzeugenden Geraden dieser developpablen Flächen die gegebene Curve immer unter demselben Winkel ω schneiden werden.

Die Gleichung dieses Kegels, dessen Scheitel durch den Punct $x = \alpha$, $y = \varphi\alpha$ der gegebenen Curve geht, in Beziehung auf α differentiirt, wird eine zweyte Gleichung geben, und beyde Gleichungen zusammen werden nach der Elimination von α die gesuchte Gleichung jener developpablen Fläche geben.

Es ist aber die Gleichung der Achse des Kegels, d. h. die der Tangente der gegebenen Curve in dem Puncte $x = \alpha$, $y = \varphi\alpha$ folgende

$$y - \varphi\alpha = (x - \alpha)\varphi'.$$

Die Gleichung einer Kugel, deren Halbmesser die Einheit, und deren Mittelpunct im Scheitel des Kegels ist, wird seyn

$$(x-\alpha)^2 + (y - \varphi\alpha)^2 + z^2 = 1 \;\ldots\; (\text{VI}).$$

Denkt man sich eine auf die Tangente der Curve senkrechte Ebene; die von dem Mittelpuncte der Kugel um die Grösse $\text{Cos}\,\omega$ entfernt ist, so wird der Durchschnitt dieser Ebene mit der Kugel eine der kreisförmigen Grundlinien des Kegels seyn. Aber die Coordinaten des Punctes, wo diese senkrechte Ebene die Tangente schneidet, sind

$$x = \alpha - \frac{\text{Cos}\,\omega}{\sqrt{1+\varphi'^2}} \text{ und } y = \varphi\alpha - \frac{\varphi'.\text{Cos}\,\omega}{\sqrt{1+\varphi'^2}},$$

also ist die Gleichung der senkrechten Ebene

$$(x-\alpha) + (y - \varphi\alpha).\varphi' + \text{Cos}\,\omega.\sqrt{1+\varphi'^2} = 0 \;\ldots\; (\text{VII}),$$

und die beyden Gleichungen (VI), (VII) gehören für die gesuchte kreisförmige Grundlinie des Kegels.

Sind dann a, b, c die drey Coordinaten des Scheitels des Kegels, so wird man (Cap. VIII. §. 6.) um den Kegel selbst zu finden, aus den zwey Gleichungen VI, VII der Grundlinie und den zwey folgenden

$$\frac{x-a}{z-c}=\gamma,\ \frac{y-b}{z-c}=f.\gamma.$$

die Grössen x y z eliminiren. Hier ist $a=\alpha$, $b=\varphi\alpha$, und $c=o$, also das Resultat jener Elimination, oder die gesuchte Gleichung des beweglichen Kegels

$$\begin{aligned}&\text{Cos}^2\,\omega\,(1+\varphi'^2)\,[(x-\alpha)^2+(y-\varphi\alpha)^2+z^2]\\&=[(x-\alpha)+(y-\varphi\alpha)\varphi']^2\ \ldots\ldots\ (\text{VIII}),\end{aligned}$$

und diese Gleichung vertritt hier die Gleichung (II §. 5.) einer auf die Curve senkrechten Ebene. Das Differential der Gleichung (VIII) in Beziehung auf die Grösse α ist

$$\begin{aligned}&\text{Cos}^2\,\omega\,.\,\varphi'\,\varphi''\,[(x-\alpha)^2+(y-\varphi\alpha)^2+z^2]\\&+[\text{Sin}^2\,\omega\,(1+\varphi'^2)-(y-\varphi\alpha)\,\varphi'']\,[(x-\alpha)\\&+(y-\varphi\alpha)\,\varphi']=o\ \ldots\ (\text{IX}),\end{aligned}$$

und die Elimination von α aus den beyden letzten Gleichungen wird die gesuchte Gleichung unserer developpablen Fläche geben.

I. Für den besondern Fall $\omega=90$ gehen diese Gleichungen (VIII), (IX) in folgende einfachere über

$$\begin{aligned}&x-\alpha+(y-\varphi\alpha)\,.\,\varphi'=o\\&1+\varphi'^2-(y-\varphi\alpha)\,.\,\varphi''=o,\end{aligned}$$

und diese Ausdrücke sind identisch mit den Gleichungen II, IV des §. 5., wenn man dort x in y und z in x verwandelt, und $y=\psi\alpha=o$ setzt.

10. §. Dasselbe lässt sich auch auf Curven von doppelter Krümmung fortsetzen. Seyen $x=\varphi z$, $y=\psi z$ die Gleichungen einer solchen Curve, und $z=\alpha$, $y=\psi\alpha$, $x=\varphi\alpha$ die drey Coordinaten des Scheitels jenes Kegels, so werden die Gleichungen der Achse des Kegels oder die der Tangente der Curve seyn

$$x - \varphi\alpha = (z - \alpha)\varphi'$$
$$y - \psi\alpha = (z - \alpha)\psi'.$$

Ist dann wieder ω der Winkel der Seitenlinien des Kegels, mit der Achse desselben, und denkt man sich eine Ebene senkrecht auf die Tangente der Curve in der Entfernung Cos ω vom Scheitelpunct des Kegels, so sind die Coordinaten des Punctes der Tangente, wo sie von jener Ebene geschnitten wird,

$$x = \varphi\alpha - \frac{\varphi' . \operatorname{Cos}\omega}{\sqrt{1 + \varphi'^2 + \psi'^2}}$$
$$y = \psi\alpha - \frac{\psi' . \operatorname{Cos}\omega}{\sqrt{1 + \varphi'^2 + \psi'^2}}$$
$$z = \alpha - \frac{\operatorname{Cos}\omega}{\sqrt{1 + \varphi'^2 + \psi'^2}}.$$

Also wird die Gleichung jener Ebene die Form haben

$$z - \alpha + \frac{\operatorname{Cos}\omega}{\sqrt{1 + \varphi'^2 + \psi'^2}} = A\left(x - \varphi\alpha + \frac{\varphi' \operatorname{Cos}\omega}{\sqrt{1 + \varphi'^2 + \psi'^2}}\right)$$
$$+ B\left(y - \psi\alpha + \frac{\psi' . \operatorname{Cos}\omega}{\sqrt{1 + \varphi'^2 + \psi'^2}}\right),$$

wo noch A, B so zu bestimmen sind, dass die Ebene senkrecht auf die Tangente sey. Diese Bedingung gibt aber

$$A = -\varphi' \text{ und } B = -\psi',$$

also ist die Gleichung jener Ebene

$$(x - \varphi\alpha)\varphi' + (y - \psi\alpha)\psi' - (z - \alpha)$$
$$+ \operatorname{Cos}\omega . \sqrt{1 + \varphi'^2 + \psi'^2} = 0 \;.\;.\;.\;.\; (X).$$

Die Gleichung der Kugel aber, deren Mittelpunct im Scheitel des Kegels und deren Halbmesser gleich der Einheit ist, wird seyn

$$(x - \varphi\alpha)^2 + (y - \psi\alpha)^2 + (z - \alpha)^2 = 1 \;.\;.\;.\;.\;.\; (XI).$$

Verbindet man, wie in §. 9. diese zwey Gleichungen X, XI mit den beyden folgenden

$$\frac{x - \varphi\alpha}{z - \alpha} = \gamma, \quad \frac{y - \psi\alpha}{z - \alpha} = f\gamma,$$

so gibt die Elimination von x, y, z aus den letzten vier Gleichungen

$$\cos^2 \omega (1 + \varphi'^2 + \psi'^2) [(x - \varphi\alpha)^2 + (y - \psi\alpha)^2 + (z - \alpha)^2]$$
$$= [(x - \varphi\alpha) . \varphi' + (y - \psi\alpha) . \psi' + (z - \alpha)]^2 \ldots\ldots (XII),$$

und diess ist die gesuchte Gleichung des beweglichen Kegels. Um daher die einhüllende Fläche zu finden, welche dieser Kegel in allen seinen Lagen umschliesst und berührt, wird das Differential von XII in Beziehung auf die Grösse α seyn

$$\cos^2 \omega (\varphi' \varphi'' + \psi' \psi'') [(x - \varphi\alpha)^2 + (y - \psi\alpha)^2 + (z - \alpha)^2]$$
$$+ [\sin^2 \omega (1 + \varphi'^2 + \psi'^2) - (x - \varphi\alpha) \varphi'' - (y - \psi\alpha) \psi'']$$
$$[(x - \varphi\alpha) \varphi' + (y - \psi\alpha) \psi' + (z - \alpha)] = 0 \ldots\ldots (XIII),$$

und die Elimination von α aus den beyden Gleichungen XII, XIII wird die gesuchte Gleichung der developpablen Fläche geben.

Setzt man in den Gleichungen XII, XIII die Grösse $\omega = 90$, so erhält man die Gleichungen II, IV wieder. In der That ist $\omega = 90$, so stehet die Seitenlinie des Kegels auf der Achse desselben senkrecht, und der Kegel geht in eine auf die gegebene Curve senkrechte Ebene über, und die auf einander folgenden Durchschnitte dieser senkrechten Ebene waren es, welche wir in §. 5. betrachtet haben.

Ex. Die gegebene Curve sey ein Kreis, dessen Halbmesser r, und dessen Mittelpunct der Anfangspunct der Coordinaten ist. Man suche die Fläche, welche alle Evolutoiden des Kreises enthält.

Die Gleichung der gegebenen Curve ist

$$x^2 + y^2 = r^2 \text{ also auch } \varphi\alpha = \sqrt{r^2 - \alpha^2},$$

und $\varphi' = \dfrac{-\alpha}{\sqrt{r^2 - \alpha^2}}$,

und daher die Gleichung des Kegels

$$r^2 \cos^2 \omega \, [(x - \alpha)^2 + (y - \sqrt{r^2 - \alpha^2})^2 + z^2]$$
$$= [x \sqrt{r^2 - \alpha^2} - \alpha y]^2 \ldots\ldots (XIV),$$

und dessen Differential in Beziehung auf α

$$(x\sqrt{r^2-\alpha^2}-\alpha y).(r^2\cos^2\omega-\alpha x-y\sqrt{r^2-\alpha^2})=0.$$

Da die letzte Gleichung zwey Factoren hat, von denen der erste hier unbrauchbar ist, so ist auch

$$r^2\cos^2\omega-\alpha x-y\sqrt{r^2-\alpha^2}=0\ .\ .\ .\ .\ .\ (XV).$$

Eliminirt man die Grösse α aus den beyden Gleichungen (XIV), (XV), so erhält man für die gesuchte developpable Fläche

$$z^2=(x^2+y^2)\,tg^2\,\omega-r^2\sin^2\omega.$$

Diese Fläche ist also der zweyten Ordnung und durch die Rotation einer Geraden um die Achse der z entstanden, welche Gerade mit der Ebene der x y den Winkel ω bildet, und deren kürzeste Distanz von der Achse der z in der Ebene der x y liegt, und gleich $r\cos\omega$ ist.

Die Durchschnittslinie dieser Fläche mit der Ebene des gegebenen Kreises, ist wieder ein Kreis, dessen Gleichung

$$x^2+y^2=r^2\cos^2\omega$$

ist, und dieser zweyte Kreis ist die einzige *ebene* Evolutoide von allen, zu denen der Winkel ω gehört. Alle andern Evolutoiden, zu denen derselbe Winkel ω gehört, sind Curven von doppelter Krümmung, die sich immer mehr und mehr jener *ebenen* Evolutoide nähern, ohne sie je zu erreichen, so dass diese ebene Evolutoide als die Asymptote aller andern angesehen werden kann. Ist endlich $\omega=90$, so ist die Gleichung dieses zweyten Kreises

$$x^2+y^2=0$$

oder die *Evolute* eines Kreises ist ein einziger Punct, der Mittelpunct des gegebenen Kreises.

Dass sich übrigens die Untersuchungen des §. 6. und 7. auch auf die gegenwärtigen allgemeinen Betrachtungen unverändert anwenden lassen, ist für sich klar.

So wird man z. B. die *Wendungscurve* jeder solchen developpablen Fläche erhalten, wenn man die Gleichung XV oder XIII noch einmahl in Beziehung auf α differentiirt, und wenn man dann aus der Gleichung XIV und ihrer beyden Differentialien, oder aus der Gleichung XI und ihren beyden Differentialien in Beziehung auf die Grösse α, diese Grösse α eliminirt.

Man sehe Mémoires présentés à l'institut. Vol. II. Paris, 1811.

Zwölftes Capitel.

Mit den vorhergehenden Betrachtungen verwandte Aufgaben.

1. §. Es seyen A, B, C die Winkel eines ebenen Dreyeckes, und die ihnen in derselben Ordnung gegenüber stehenden Seiten

$$BC = \alpha, \; AC = \beta, \; AB = \gamma.$$

Nimmt man den Scheitel des Winkels A für den Anfang der Coordinaten an, und legt die Achse der x in die Seite AC, so ist die Gleichung der Seite AB

$$y = x \operatorname{tg} A,$$

und die Gleichung der Seite BC

$$y = - x \operatorname{tg} C + \beta \operatorname{tg} C,$$

Betrachtet man aber diese beyden Gleichungen als zusammen bestehend, und sucht aus ihnen die Werthe von x und y, so erhält man die Coordinaten des Durchschnittspunctes der Seiten α und γ, welche Coordinaten daher sind

$$x = \frac{\beta \operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} C} \text{ und } y = \frac{\beta \operatorname{tg} A \operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} C}.$$

Diess vorausgesetzt ist die Seite γ selbst

$$\gamma = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{\beta \operatorname{tg} C \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 A}}{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} C}.$$

Eben so erhält man, wenn man den Scheitel des Winkels B in den Anfang der Coordinaten, und die Seite $BC = \alpha$ in die Achse der x legt,

$$\gamma = \frac{\alpha \operatorname{tg} C \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 B}}{\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C}.$$

Wir haben daher

$$\gamma = \frac{\beta \operatorname{tg} C \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 A}}{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} C} = \frac{\alpha \operatorname{tg} C \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 B}}{\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C} \ldots (I),$$

und eben so, oder durch blosses Umkehren der Buchstaben

$$\beta = \frac{\alpha \operatorname{tg} B \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 C}}{\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C} = \frac{\gamma \operatorname{tg} B \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 A}}{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B} \ldots (II),$$

$$\alpha = \frac{\gamma \operatorname{tg} A \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 B}}{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B} = \frac{\beta \operatorname{tg} A \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 C}}{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} C} \ldots (III).$$

Man bemerkt leicht, dass unter den Grössen A, B, C eine Bedingungsgleichung Statt hat, wodurch eine dieser Grössen durch die beyden andern bestimmt wird. So gibt die Gleichung (I)

$$\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\operatorname{tg} C \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 B}}{\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C},$$

und die Gleichung (III)

$$\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} A \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 B}}.$$

Setzt man beyde Ausdrücke von $\frac{\gamma}{\alpha}$ einander gleich, so erhält man

$$\operatorname{tg} C = \frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B - 1} \ldots (IV),$$

welches die gesuchte Bedingungsgleichung ist. Sie drückt aus, dass die Summe der drey Winkel A, B, C gleich zwey rechten Winkeln ist.

I. Aus den Gleichungen I, II, III kann man auf eine sehr einfache Weise die bekannten Ausdrücke der ebenen Trigonometrie ableiten. So gibt die Gleichung (III)

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\operatorname{tg} A \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 C}}{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} C},$$

das heisst, wenn man die Tangenten durch die Sinus und Cosinus ausdrückt,

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\text{Sin A}}{\text{Sin A Cos C} + \text{Cos A Sin C}}, \text{ oder}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\text{Sin A}}{\text{Sin}(\text{A} + \text{C})},$$

oder endlich nach (IV),

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\text{Sin A}}{\text{Sin B}} \ldots\ldots (\text{V}).$$

Ferner gibt die Gleichung (II)

$$\beta = \frac{\gamma \,\text{tg B} \sqrt{1 + \text{tg}^2 \text{A}}}{\text{tg A} + \text{tg B}} \text{ oder } \beta = \frac{\gamma \,\text{tg B}}{\text{Cos A}\,(\text{tg A} + \text{tg B})},$$

woraus sofort folgt

$$\text{tg B} = \frac{\beta \,\text{Sin A}}{\gamma - \beta \,\text{Cos A}} \ldots\ldots (\text{VI}).$$

Endlich ist, nach der Gleichung (V)

$$\text{Sin B} = \frac{\beta}{\alpha} \text{Sin A},$$

also auch

$$\text{tg B} = \frac{\text{Sin B}}{\sqrt{1 - \text{Sin}^2 \text{B}}}, \text{ oder}$$

$$\text{tg B} = \frac{\beta \,\text{Sin A}}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 \,\text{Sin}^2 \text{A}}}.$$

Substituirt man diesen Werth von tg B in der Gleichung (VI), so erhält man

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \,\text{Cos A} \ldots (\text{VII}),$$

und die Gleichungen V, VI, VII enthalten bekanntlich die ganze ebene Trigonometrie, ja selbst schon die Gleichung VII allein, aus welcher sich, als aus einem der fruchtbarsten Sätze, nicht nur die Trigonometrie, sondern auch die ganze Geometrie auf eine sehr einfache Art ableiten lässt. So gibt zum Beyspiel die Gleichung (VII)

$$\text{Cos A} = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma},$$

also auch

$$\text{Sin A} = \frac{\sqrt{2(\beta^2\gamma^2 + \alpha^2\gamma^2 + \alpha^2\beta^2) - \alpha^4 - \beta^4 - \gamma^4}}{2\beta\gamma}$$

Setzt man den Zähler des letzten Bruches gleich M, so ist

$$\text{Sin A} = \frac{M}{2\beta\gamma},$$

und durch eine blosse Verwandlung der Buchstaben,

$$\text{Sin B} = \frac{M'}{2\alpha\gamma}, \text{ Sin C} = \frac{M''}{2\alpha\beta}.$$

Da aber M eine symmetrische Function von $\alpha\,\beta\,\gamma$ ist, die sich nicht ändert, wenn man auch die Zeichen $\alpha\,\beta\,\gamma$ verwandelt, so ist $M = M' = M''$, und so gibt die Elimination von M aus den drey letzten Gleichungen

$$\alpha \text{ Sin B} = \beta \text{ Sin A}$$
$$\alpha \text{ Sin C} = \gamma \text{ Sin A}$$
$$\beta \text{ Sin C} = \gamma \text{ Sin B},$$

welche Ausdrücke mit der Gleichung (V) identisch sind.

Die erste dieser Gleichungen gibt

$$\text{Sin B} = \frac{\beta}{\alpha} \text{ Sin A}, \text{ oder}$$

$$\text{tg B} = \frac{\beta \text{ Sin A}}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 \text{ Sin}^2 \text{ A}}} = \frac{\beta \text{ Sin A}}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 + \beta^2 \text{ Cos}^2 \text{ A}}}.$$

Nach der Gleichung (VII) aber ist

$$\alpha^2 - \beta^2 = \gamma^2 - 2\beta\gamma \text{ Cos A},$$

also ist auch

$$\text{tg B} = \frac{\beta \text{ Sin A}}{\sqrt{\gamma^2 - 2\beta\gamma \text{ Cos A} + \beta^2 \text{ Cos}^2 \text{ A}}}, \text{ oder}$$

$$\text{tg B} = \frac{\beta \text{ Sin A}}{\gamma - \beta \text{ Cos A}},$$

welches die Gleichung (VI) ist.

II. Diese Gleichung (VII) verdient es daher, noch auf eine Weise gesucht zu werden, die unabhängiger von andern Vorkenntnissen der Geometrie ist. Behält man die vorige Bezeichnung des ebenen Dreyeckes bey, und fällt man von dem Scheitel C auf die gegenüber stehende Seite AB ein Loth, welches diese Seite in dem Puncte D treffen soll, so hat man

$$\gamma = AD + BD,$$

wo BD negativ ist, wenn der Winkel B grösser als ein rechter ist.

Aus der blossen Erklärung des Cosinus aber folgt

$$\frac{AD}{\beta} = \text{Cos}\,A \text{ und } \frac{BD}{\alpha} = \text{Cos}\,B.$$

Substituirt man diese Werthe von AD, BD in der vorigen Gleichung, so erhält man

$$\gamma = \beta\,\text{Cos}\,A + \alpha\,\text{Cos}\,B,$$

oder wenn man alle Glieder durch γ multiplicirt,

$$\gamma^2 = \beta\,\gamma\,\text{Cos}\,A + \alpha\,\gamma\,\text{Cos}\,B.$$

Wiederhohlt man dasselbe Verfahren, indem man von dem Scheitel B und A auf die gegenüber stehenden Seiten β und α Lothe fällt, oder einfacher, indem man die Buchstaben der letzten Gleichung ändert, so erhält man eben so

$$\beta^2 = \alpha\beta\,\text{Cos}\,C + \beta\gamma\,\text{Cos}\,A \quad \text{und}$$
$$\alpha^2 = \alpha\gamma\,\text{Cos}\,B + \alpha\beta\,\text{Cos}\,C.$$

Subtrahirt man die letzte dieser drey Gleichungen von der Summe der beyden ersten, so erhält man

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\,\text{Cos}\,A$$

und eben so

$$\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma\,\text{Cos}\,B$$
$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\,\text{Cos}\,C,$$

welche Ausdrücke mit der Gleichung (VII) identisch sind.

2. §. Dieselbe Gleichung (VII) bahnt auch einen einfachen Weg zu den bekannten Ausdrücken der *sphärischen* Trigonometrie.

Wir wollen auch bey dem sphärischen Dreyecke die Beziehung der Grössen A B C und $\alpha\ \beta\ \gamma$ beybehalten, wie wir sie oben für das ebene angenommen haben. Der Halbmesser der Kugel, auf dessen Oberfläche das sphärische Dreyeck liegt, soll die Einheit seyn, und der Mittelpunct dieser Kugel soll durch O bezeichnet werden. Man verbinde die Scheitel der Winkel A, B, C mit dem Mittelpuncte der Kugel. Ein Loth von C auf O A soll O A in a, und ein Loth von a auf O A soll O B in b schneiden, so ist der Winkel

$$C a b = C A B = A,$$

und man hat in den ebenen Dreyecken C a b und O C b, nach der Gleichung (VII) folgende Ausdrücke,

$$C b^2 = a b^2 + a C^2 - 2\, a b . a C . \mathrm{Cos}\, A$$
$$C b^2 = 1 + b O^2 - 2\, b O . \mathrm{Cos}\, \alpha.$$

Bemerkt man aber, dass nach der blossen Erklärung der Tangente und des Cosinus ist

$$a b = a O . \mathrm{tg}\, \gamma$$
$$a C = a O . \mathrm{tg}\, \beta$$
$$b O = \frac{a O}{\mathrm{Cos}\, \gamma} \text{ und } a O = O C\, \mathrm{Cos}\, \beta = \mathrm{Cos}\, \beta,$$

so erhält man, wenn man diese Werthe in den beyden ersten Gleichungen substituirt, und die zwey Ausdrücke von C b einander gleich setzt,

$$\mathrm{Cos}\, \alpha = \mathrm{Cos}\, \beta\, \mathrm{Cos}\, \gamma + \mathrm{Sin}\, \beta\, \mathrm{Sin}\, \gamma\, \mathrm{Cos}\, A \ldots (\mathrm{VIII}),$$

welches die Gleichung der sphärischen Trigonometrie ist, aus der sich alle andern eben so ableiten lassen, wie wir oben die Ausdrücke der ebenen Trigonometrie aus der Gleichung (VII) abgeleitet haben. Man sieht leicht, dass die Gleichung (VIII) in die Gleichung (VII) übergeht, wenn das sphärische Dreyeck ein ebenes wird. Nimmt man nähmlich die Seiten des sphäri-

schen Dreyeckes unendlich klein an, so hat man, wenn man die vierten und höheren Potenzen von $\alpha\ \beta\ \gamma$ vernachlässiget,

$$\operatorname{Cos}\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2},\ \operatorname{Cos}\beta = 1 - \frac{\beta^2}{2},\ \operatorname{Cos}\gamma = 1 - \frac{\gamma^2}{2},$$

während die Winkel A, B, C dieselben bleiben. Substituirt man diese Werthe von $\operatorname{Cos}\alpha$, $\operatorname{Cos}\beta$ und $\operatorname{Cos}\gamma$ in der Gleichung VIII, so erhält man

$$1 - \frac{\alpha^2}{2} = \left(1 - \frac{\beta^2}{2}\right)\left(1 - \frac{\gamma^2}{2}\right) + \beta\gamma \operatorname{Cos} A, \text{ oder}$$

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \operatorname{Cos} A,$$

welches die Gleichung (VII) ist.

3. §. Man kann aber auch die Ausdrücke der sphärischen Trigonometrie auf eine sehr einfache Weise aus den vorhergehenden Betrachtungen der analytischen Geometrie ableiten. Zu diesem Zwecke sollen sich zwey Ebenen unter dem Winkel γ schneiden, und die rechtwinklichten Coordinaten irgend eines Punctes C in Beziehung auf die erste Ebene sollen x y z, und in Beziehung auf die zweyte $x'\ y'\ z'$ heissen. Der Anfangspunct dieser Coordinaten, so wie die Achse der x und x' sollen endlich in der gemeinschaftlichen Durchschnittslinie beyder Ebenen liegen. Diess vorausgesetzt, hat man sofort folgende Gleichungen (Capitel V.)

$$\left.\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= z \operatorname{Sin}\gamma + y \operatorname{Cos}\gamma \\ z' &= z \operatorname{Cos}\gamma - y \operatorname{Sin}\gamma \end{aligned}\right\}$$

Ist nun r die Entfernung jenes Punctes von dem Anfange der Coordinaten, und

$\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}$ der Winkel der r mit der Achse der $\begin{matrix}z\\ z'\end{matrix}$

$\begin{matrix}a\\ b\end{matrix}$ der Winkel der Projection von r in der Ebene $\begin{matrix}x'\ y'\\ x\ y\end{matrix}$

mit der Achse der $\begin{matrix}x'\\ x\end{matrix}$, so hat man, wenn r die Einheit ist,

$$x = \sin\alpha \cos b \qquad x' = \sin\beta \cos a$$
$$y = \sin\alpha \sin b \qquad y' = \sin\beta \sin a$$
$$z = \cos\alpha \qquad z' = \cos\beta$$

Substituirt man diese Werthe der Coordinaten in den drey vorhergehenden Gleichungen, so gibt die erste

$$\sin\alpha \cos b = \sin\beta \cos a \ldots (a),$$

und die dritte

$$\cos\beta = \cos\alpha \cos\gamma - \sin\alpha \sin\gamma \sin b \ldots (b),$$

und endlich die zweyte, dividirt durch die erste,

$$\operatorname{tg} a \cos b = \operatorname{Cotg}\alpha \sin\gamma + \sin b \cos\gamma \ldots (c).$$

Diese drey Gleichungen, ja schon die zweyte (b), aus welcher sich die beyden andern leicht ableiten lassen, enthalten die gesammten Vorschriften der sphärischen, also auch nach §. 2., der ebenen Trigonometrie. Um diess zu zeigen, beschreibe man um den Anfangspunct der Coordinaten als Mittelpunct mit dem Halbmesser $r = 1$ eine Kugel. Die verlängerten Achsen der z und z′ sollen die Fläche dieser Kugel respective in den Puncten B und A schneiden. Verbindet man die Puncte A, B, C der Kugelfläche durch drey grösste Kreise, so erhält man ein sphärisches Dreyeck ABC. Nennt man in diesem Dreyecke, wie zuvor, die Seiten

$$BC = \alpha,\ AC = \beta,\ AB = \gamma,$$

die ihnen in derselben Ordnung gegenüber stehenden Winkel aber A, B, C, so sieht man, dass die neuen Grössen $\alpha\ \beta\ \gamma$ ganz dieselben mit den vorhergehenden Grössen dieser Bezeichnung sind, und dass man überdiess hat

$$A = 90 - a$$
$$B = 90 + b$$
$$C = C.$$

Also gelten die drey vorhergehenden Gleichungen (a), (b), (c) auch für sphärische Dreyecke, wenn man nur in ihnen a in 90 — A, und b in B — 90 ver-

wandelt, das heisst, man hat für sphärische Dreyecke

$$\text{Sin}\,\alpha\,\text{Sin}\,B = \text{Sin}\,\beta\,\text{Sin}\,A \ldots (a'),$$

$$\text{Cos}\,\beta = \text{Cos}\,\alpha\,\text{Cos}\,\gamma + \text{Sin}\,\alpha\,\text{Sin}\,\gamma\,\text{Cos}\,B \ldots (b'),$$

$$\text{Cotg}\,A\,\text{Sin}\,B = \text{Cotg}\,\alpha\,\text{Sin}\,\gamma - \text{Cos}\,\gamma\,\text{Cos}\,B \ldots (c').$$

Nach der ersten dieser Gleichungen ist also auch

$$\frac{\text{Sin}\,\gamma}{\text{Sin}\,\alpha} = \frac{\text{Sin}\,C}{\text{Sin}\,A},$$

und daher

$$\text{Cotg}\,\alpha\,\text{Sin}\,\gamma = \text{Cos}\,\alpha\,\frac{\text{Sin}\,C}{\text{Sin}\,A}.$$

Substituirt man diesen Ausdruck von Cotg α Sin γ in der Gleichung (c′), so erhält man

$$\text{Cos}\,A\,\text{Sin}\,B = \text{Cos}\,\alpha\,\text{Sin}\,C - \text{Cos}\,\gamma\,\text{Cos}\,B\,\text{Sin}\,A,$$

und analog, oder durch blosse Verwechslung der Zeichen

$$\text{Cos}\,C\,\text{Sin}\,B = \text{Cos}\,\gamma\,\text{Sin}\,A - \text{Cos}\,\alpha\,\text{Cos}\,B\,\text{Sin}\,C.$$

Eliminirt man aus den beyden letzten Gleichungen die Grösse Cos γ, so erhält man

$$\text{Cos}\,A = \text{Sin}\,B\,\text{Sin}\,C\,\text{Cos}\,\alpha - \text{Cos}\,B\,\text{Cos}\,C \ldots (d'),$$

und die Gleichungen (a′) (b′) (c′) (d′) enthalten die gesammte sphärische Trigonometrie.

4. §. Die Fläche x eines sphärischen Dreyeckes ABC ist bekanntlich

$$x = A + B + C - 180°,$$

wenn der Halbmesser der Kugel die Einheit ist. Durch die Gleichungen des §. 3. aber findet man leicht den bekannten Ausdruck

$$\text{tg}\,\frac{A+B}{2} = \frac{\text{Cos}\,\frac{\alpha-\beta}{2}}{\text{Cos}\,\frac{\alpha+\beta}{2}}\,\text{Cotg}\,\frac{C}{2},$$

und aus diesem Ausdrucke kann man sofort die Werthe von

$$\operatorname{tg} \frac{A+B+C}{2},$$

das heisst von $-\operatorname{Cotg} \frac{x}{2}$ ableiten, wodurch man erhält

$$\operatorname{Cotg} \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{Cotg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{Cotg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{Cos} C}{\operatorname{Sin} C},$$

wo also die Fläche des Dreyecks durch zwey Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel des Dreyeckes bestimmt wird.

I. Diess vorausgesetzt, wollen wir eben so die Fläche eines Vieleckes suchen, das auf einer Kugel verzeichnet ist, und dessen Seiten alle grösste Kreise der Kugel sind.

Nimmt man auf der Fläche der Kugel im Innern des Vieleckes einen willkührlichen Punct, und zieht durch diesen Punct, durch den Mittelpunct der Kugel, und durch alle Winkel des Vieleckes eine Reihe von Ebenen, so theilen diese Ebenen das Vieleck in eben so viele sphärische Dreyecke, als das Vieleck Seiten hat. Die Summe der Flächen dieser Dreyecke ist, nach dem Vorhergehenden, gleich der Summe aller innern Winkel dieser Dreyecke, weniger 180 . n, wenn n die Anzahl der Seiten des Vieleckes ist. Aber diese Summe der innern Winkel der Dreyecke besteht erstens aus der Summe aller inneren Winkel des Vieleckes, und zweytens aus der Summe der Winkel, die um den willkührlichen Punct beschrieben werden, welche letztern gleich 360 Graden sind; woraus folgt, dass die Fläche des Vieleckes gleich ist der Summe der innern Winkel des Vieleckes, weniger der Grösse $(n-2)\, 180^\circ$.

II. Wir wollen nun suchen, auf wie viele Arten sich die Oberfläche einer Kugel mit gleichen und regelmässigen sphärischen Vielecken vollständig bedecken lässt.

Sey x die Zahl der Seiten eines dieser Vielecke, y die Zahl der Winkel, die um jede Ecke des Vieleckes liegen, und z die Zahl der Vielecke selbst. Da aber die Fläche der ganzen Kugel, deren Halbmesser die Einheit ist, durch $4 \cdot 180^\circ$ ausgedrückt wird, so ist die Fläche eines jener Vielecke gleich $\frac{4 \cdot 180^\circ}{z}$. Nennt man also S die Summe aller innern Winkel des Vieleckes, so ist (nach I.) die Fläche des Vieleckes

$$S - (x - 2)\, 180,$$

und da diese Fläche des Vieleckes z Mahl genommen, gleich der Fläche der ganzen Kugel ist, so hat man

$$z\,[S - (x - 2)\, 180] = 4 \cdot 180, \quad \text{oder}$$

$$S = \frac{4 \cdot 180}{z} + (x - 2)\, 180.$$

Da aber die Zahl der innern Winkel des Vieleckes gleich der Zahl der Seiten dieses Vieleckes, also gleich x ist, so hat man für den Werth eines jeden innern Winkels den Ausdruck

$$\frac{4 \cdot 180}{xz} + \frac{(x - 2)\, 180}{x},$$

und da überdiess jeder dieser innern Winkel gleich der Summe von vier rechten Winkeln, dividirt durch y ist, so hat man

$$\frac{4 \cdot 180}{xz} + \frac{(x - 2)\, 180}{x} = \frac{2 \cdot 180}{y}, \quad \text{oder}$$

$$y\,z\,(x - 2) + 4\,y = 2\,x\,z,$$

eine unbestimmte Gleichung, in welcher die Grössen x y z, der Natur der Aufgabe gemäss, nicht kleiner als 3 seyn können.

Da diese Gleichung für z den Werth

$$z = \frac{4y}{2y - x(y-2)}$$

gibt, und da z eine positive Zahl seyn muss, so muss auch $x(y-2) < 2y$ oder $x < 2 + \frac{4}{y-2}$ seyn. Aber der kleinste Werth von y ist 3, also ist auch der grösste Werth von x gleich 6. Wir haben also nur die vier Fälle zu betrachten, wo $x = 3, 4, 5, 6$ ist.

Der erste Fall $x = 3$ gibt für das Vieleck ein gleichseitiges sphärisches Dreyeck, und

$$z = \frac{4y}{6-y},$$

woraus folgt, dass y nur gleich 3, 4, 5 oder 6 seyn kann, für welche Werthe von y dann z gleich 4, 8, 20 oder unendlich wird. Man kann daher die Kegel mit 4, 8, 20 oder auch mit unendlich vielen gleichseitigen Dreyecken bedecken.

Der zweyte Fall $x = 4$ gibt für das Vieleck ein gleichseitiges sphärisches Viereck, und

$$z = \frac{2y}{4-y},$$

woraus folgt, dass y nur 3 oder 4 seyn kann, wo dann z gleich 6 oder unendlich wird. Man kann daher die Kegel nur mit 4 oder auch mit unendlich vielen, unendlich kleinen Vierecken bedecken.

Der dritte Fall $x = 5$ gibt für das Vieleck ein regelmässiges Fünfeck, und

$$z = \frac{4y}{10-3y},$$

woraus folgt, dass y nur gleich 3, und z gleich 12 seyn kann. Man kann daher die Kugel nur auf eine Art mit regelmässigen Fünfecken bedecken.

Der vierte Fall $x = 6$ endlich gibt $z = \frac{y}{3-y}$, und

da hier y nur gleich 3 seyn kann, wofür z unendlich wird, so folgt, dass man die Kegel nur auf eine Art mit regelmässigen Sechsecken, und auch da nur dann bedecken kann, wenn die Seiten dieser Sechsecke unendlich klein sind. Betrachtet man also nur die Vielecke, deren Seiten eine endliche Grösse haben, so kann man eine Kugel nur auf fünf verschiedene Arten mit regelmässigen Vielecken bedecken, nähmlich auf eine Art durch Vierecke, auf eine durch Fünfecke, und auf drey Arten durch Dreyecke.

5. §. Unter den mannigfaltigen Anwendungen der sphärischen Trigonometrie auf Körper, die von mehreren Ebenen begränzt sind, wollen wir hier bloss den körperlichen Inhalt eines schiefen Parallelepipedums suchen.

Sind f g h die drey Seitenlinien des Parallelepipedums, und (f g) der Winkel der beyden Seiten f und g, und eben so für die anderen Winkel, so ist f g Sin (f g) der Ausdruck des Parallelogramms, dessen Seiten f, g sind. Zieht man durch den Endpunct der Seite h, der am weitesten von der Ebene f, g entfernt ist, ein Loth x auf die Seite f, so ist $x = h \operatorname{Sin}(fh)$. Die senkrechte Entfernung y jenes Punctes aber von der Ebene f, g ist $y = x \operatorname{Cos} n$, wo n der Winkel der Linien x und y ist. Da nun der körperliche Inhalt k des Parallelepipedums gleich dem Producte der Basis in die Höhe desselben ist, so hat man

$$k = y \,.\, f \,.\, g \operatorname{Sin}(fg) = f \,.\, g \,.\, h \,.\, \operatorname{Sin}(fg) \operatorname{Sin}(fh) \operatorname{Cos} n.$$

Denkt man sich aber den gemeinschaftlichen Durchschnittspunct der drey Seiten f g h als den Mittelpunct einer Kugel von unbestimmtem Halbmesser, so kann man die Puncte, in welchem die verlängerten Seiten f, g, h die Oberfläche der Kugel treffen, als die Scheitel eines sphärischen Dreyeckes ansehen, dessen Seiten gleich den Winkeln (f g), (f h), (g h) sind, und man sieht leicht, dass der Winkel dieses Dreyeckes, der zwi-

schen den Seiten (fg), (fh) enthalten ist, gleich 90 — n ist. Man hat daher [§. 3. Gchg (b')]

$$\text{Sin } n = \frac{\text{Cos }(gh) - \text{Cos }(fg)\,\text{Cos }(fh)}{\text{Sin }(fg)\,\text{Sin }(fh)}.$$

Substituirt man den aus dieser Gleichung folgenden Werth von Cos n in dem vorhergehenden Ausdrucke von k, so erhält man

$$k = fgh\sqrt{\text{Sin}^2(fg)\,\text{Sin}^2(fh) - [\text{Cos}(gh) - \text{Cos}(fg)\,\text{Cos}(fh)]^2}$$

$$= fgh\sqrt{[\text{Sin }(fg)\ \text{Sin }(gh) + \text{Cos }(fh) - \text{Cos}(fg)\,\text{Cos }(gh)]} \times$$

$$\sqrt{\text{Sin }(fg)\ \text{Sin }(gh) - \text{Cos}(fh) + \text{Cos }(fg)\,\text{Cos}(gh)]}$$

$$= fgh\sqrt{[\text{Cos }(fh) - \text{Cos }((fg) + (gh))]\,.\,[\text{Cos }((fg) - (gh)) - \text{Cos }(fh)]},$$

oder endlich

$$k = 2fgh\sqrt{\text{Sin}\frac{(fg) + (fh) + (gh)}{2}\ \text{Sin}\frac{(fg) + (fh) - (gh)}{2}} \times$$

$$\sqrt{\text{Sin}\frac{(fg) + (gh) - (fh)}{2}\ \text{Sin}\frac{(fh) + (gh) - (fg)}{2}}.$$

I. Einen anderen Ausdruck für den körperlichen Inhalt des schiefen Parallelepipedums haben wir schon oben (Cap. II. §. 6) gefunden. Sind nähmlich x y z die rechtwinklichten Coordinaten des Punctes, in welchem sich die drey Seitenlinien des Körpers schneiden, und bezeichnet man durch $x'\ y'\ z'$, $x''\ y''\ z''$ und $x'''\ y'''\ z'''$ die Coördinaten des anderen Endpunctes dieser Seitenlinien, so erhält man a. a. O. für den Werth von k folgenden Ausdruck

$$\begin{aligned} k = &(x'-x)\,[(y''-y)\,(z'''-z) - (y'''-y)\,(z''-z)] \\ &-(x''-x)\,[(y'-y)\,(z'''-z) - (y'''-y)\,(z'-z)] \\ &+(x'''-x)\,[(y'-y)\,(z''-z) - (y''-y)\,(z'-z)]. \end{aligned}$$

II. Ist aber r die Entfernung des ersten dieser vier Puncte vom Anfange der Coordinaten, und α der Winkel dieser Entfernung r mit der Achse des x, und endlich β der Winkel der Achse der y mit der auf die Ebene der y z projicirten Entfernung r, so hat man

$$x = r \operatorname{Cos} \alpha$$
$$y = r \operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Cos} \beta$$
$$z = r \operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Sin} \beta.$$

Setzt man eben so für den zweyten Punct die Coordinaten $x' = r' \operatorname{Cos} \alpha'$, $y' = r' \operatorname{Sin} \alpha' \operatorname{Cos} \beta'$ und für den dritten $x'' = r'' \operatorname{Cos} \alpha'' \ldots$ und so fort für alle übrigen, so erhält man, wenn man diese Werthe der Coordinaten in dem letzten Ausdrucke von k substituirt

$$k = r' r'' r''' \operatorname{Sin} \alpha' \operatorname{Sin} \alpha'' \operatorname{Sin} \alpha''' \left[\frac{\operatorname{Sin}(\beta''' - \beta'')}{\operatorname{tg} \alpha'} - \frac{\operatorname{Sin}(\beta''' - \beta')}{\operatorname{tg} \alpha''} + \frac{\operatorname{Sin}(\beta'' - \beta')}{\operatorname{tg} \alpha'''} \right]$$
$$+ r r' r''' \operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Sin} \alpha' \operatorname{Sin} \alpha''' \left[\frac{\operatorname{Sin}(\beta''' - \beta')}{\operatorname{tg} \alpha} - \frac{\operatorname{Sin}(\beta''' - \beta)}{\operatorname{tg} \alpha'} + \frac{\operatorname{Sin}(\beta' - \beta)}{\operatorname{tg} \alpha'''} \right]$$
$$- r r' r'' \operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Sin} \alpha' \operatorname{Sin} \alpha'' \left[\frac{\operatorname{Sin}(\beta'' - \beta')}{\operatorname{tg} \alpha} - \frac{\operatorname{Sin}(\beta'' - \beta)}{\operatorname{tg} \alpha'} + \frac{\operatorname{Sin}(\beta' - \beta)}{\operatorname{tg} \alpha''} \right]$$
$$- r r'' r''' \operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Sin} \alpha'' \operatorname{Sin} \alpha''' \left[\frac{\operatorname{Sin}(\beta''' - \beta'')}{\operatorname{tg} \alpha} - \frac{\operatorname{Sin}(\beta''' - \beta)}{\operatorname{tg} \alpha''} + \frac{\operatorname{Sin}(\beta'' - \beta)}{\operatorname{tg} \alpha'''} \right],$$

welches ein anderer merkwürdiger Ausdruck für das schiefe Parallelepipedum ist. Um ihn einfacher zu machen, wollen wir die Grösse

$$r' r'' r''' \operatorname{Sin} \alpha' \operatorname{Sin} \alpha'' \operatorname{Sin} \alpha''' \left[\frac{\operatorname{Sin}(\beta''' - \beta'')}{\operatorname{tg} \alpha'} - \frac{\operatorname{Sin}(\beta''' - \beta')}{\operatorname{tg} \alpha''} + \frac{\operatorname{Sin}(\beta'' - \beta')}{\operatorname{tg} \alpha'''} \right]$$

durch (1.2.3) ausdrücken, so dass man z. B. erhält (0.2.3), wenn man in dem letzten Ausdrucke bloss die Grössen $r' \alpha' \beta'$ in $r \alpha \beta$ verwandelt, und so mit den übrigen. Diess vorausgesetzt, hat man

$$k = (1.2.3) + (0.1.3) - (0.1.2) - (0.2.3).$$

Nimmt man der grösseren Einfachheit wegen an, dass der erste der vier Puncte, dessen Coordinaten x y z sind, der Anfangspunct der Coordinaten sey, so ist $r = o$, und der vorige Werth von k geht in den folgenden über

$$k = (1 . 2 . 3).$$

III. Wir wollen nun voraussetzen, dass das bisher betrachtete Parallelepipedum unendlich klein sey, und dass die Spitzen desselben durch irgend eine Kraft verschoben werden, doch so, dass der Körper auch in der neuen Lage noch ein Parallelepipedum bleibe. Man suche den körperlichen Inhalt dieses neuen Parallelepipedums. Nimmt man an, dass die Coordinaten x y z Functionen der drey ursprünglichen Coordinaten a b c sind, und bezeichnet man durch $\left(\frac{dx}{da}\right)$ das partielle Differential der Grösse x, die bloss von einer Änderung der Grösse a entspringt, und so fort für die übrigen, so hat man für die Lage des zweyten Punctes in der neuen Lage

$$x' = x + \left(\frac{dx}{da}\right) da$$

$$y' = y + \left(\frac{dy}{da}\right) da$$

$$z' = z + \left(\frac{dz}{da}\right) da.$$

und eben so für den dritten und vierten Punct

$$x'' = x + \left(\frac{dx}{db}\right) db \qquad x''' = x + \left(\frac{dx}{dc}\right) dc$$

$$y'' = y + \left(\frac{dy}{db}\right) db \qquad y''' = y + \left(\frac{dy}{dc}\right) dc$$

$$z'' = z + \left(\frac{dz}{db}\right) db \qquad z''' = z + \left(\frac{dz}{dc}\right) dc.$$

Substituirt man diese Ausdrücke in der Gleichung des Nr. I., so erhält man sofort für k den Werth

$$\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{dx}{da}\right)\left[\left(\frac{dy}{db}\right)\left(\frac{dz}{dc}\right)-\left(\frac{dy}{dc}\right)\left(\frac{dz}{db}\right)\right]\\+\left(\frac{dx}{db}\right)\left[\left(\frac{dy}{dc}\right)\left(\frac{dz}{da}\right)-\left(\frac{dy}{da}\right)\left(\frac{dz}{dc}\right)\right]\\+\left(\frac{dx}{dc}\right)\left[\left(\frac{dy}{da}\right)\left(\frac{dz}{db}\right)-\left(\frac{dy}{db}\right)\left(\frac{dz}{da}\right)\right]\end{array}\right\}.da.db.dc.$$

IV. Eben so könnte man die Gleichung des Nr. II. behandeln, um einen Ausdruck für k zu erhalten, der von $r\,\alpha\,\beta$ abhängt. Da aber die Substitutionen sich hier nicht so unmittelbar anbringen lassen, so wird es bequemer seyn, die letzte Gleichung selbst zu Grunde zu legen.

Da nähmlich überhaupt jede der Grössen $x\,y\,z$ eine Function der drey Grössen $r\,\alpha\,\beta$ zugleich ist, so hat man für die vollständige Veränderung von x den Ausdruck

$$dx = \left(\frac{dx}{dr}\right)dr + \left(\frac{dx}{d\alpha}\right)d\alpha + \left(\frac{dx}{d\beta}\right)d\beta,$$

und eben so für alle übrigen. Da aber in den letzten Gleichungen jede der Grössen dx, dy, dz und dr, $d\alpha$, $d\beta$ als Functionen der ursprünglichen Coordinaten a, b, c zu betrachten sind, so hat man für die partielle Veränderung von x in Beziehung auf die Grösse a

$$\left(\frac{dx}{da}\right)=\left(\frac{dx}{dr}\right)\left(\frac{dr}{da}\right)+\left(\frac{dx}{d\alpha}\right)\left(\frac{d\alpha}{da}\right)+\left(\frac{dx}{d\beta}\right)\left(\frac{d\beta}{da}\right),$$

und ähnliche Ausdrücke wird man für $\left(\frac{dx}{db}\right)$, $\left(\frac{dx}{dc}\right)$, so wie für $\left(\frac{dy}{da}\right)$, $\left(\frac{dz}{da}\right)$..... erhalten.

Substituirt man diese Ausdrücke in der letzten Gleichung des Nr. III. und bemerkt, dass $\left(\frac{dx}{d\beta}\right)$ gleich Null ist, so erhält man nach einigen einfachen Reductionen für den ersten Theil dieser Gleichung, wenn man der Kürze wegen die Parenthesen weglässt,

$$\frac{dx}{da}\left[\frac{dy}{db}\cdot\frac{dz}{dc}-\frac{dy}{dc}\cdot\frac{dz}{db}\right]=$$

$$\left(\frac{dr\,dx}{da\,dr}+\frac{da\,dx}{da\,d\alpha}\right)\cdot\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{d\alpha dr}{dbdc}-\frac{d\alpha dr}{dcdb}\right)\left(\frac{dydz}{d\alpha dr}-\frac{dydz}{drd\alpha}\right)\\+\left(\frac{d\beta dr}{dbdc}-\frac{d\beta dr}{dcdb}\right)\left(\frac{dydz}{d\beta dr}-\frac{dydz}{drd\beta}\right)\\+\left(\frac{d\alpha d\beta}{dbdc}-\frac{d\alpha d\beta}{dcdb}\right)\left(\frac{dydz}{d\alpha d\beta}-\frac{dydz}{d\beta d\alpha}\right)\end{array}\right\}$$

Man sieht aber leicht, dass man für die Veränderungen der Coordinaten $x\,y\,z$ in Beziehung auf die Grössen $r\,\alpha\,\beta$ folgende Ausdrücke hat

$$\frac{dx}{dr}=\text{Cos}\,\alpha \qquad \frac{dx}{d\alpha}=-r\,\text{Sin}\,\alpha$$

$$\frac{dy}{dr}=\text{Sin}\,\alpha\,\text{Cos}\beta,\ \frac{dy}{d\alpha}=r\,\text{Cos}\,\alpha\,\text{Cos}\beta,\ \frac{dy}{d\beta}=-r\,\text{Sin}\,\alpha\,\text{Sin}\,\beta,$$

$$\frac{dz}{dr}=\text{Sin}\,\alpha\,\text{Sin}\,\beta,\ \frac{dz}{d\alpha}=r\,\text{Cos}\,\alpha\,\text{Sin}\beta,\ \frac{dz}{d\beta}=r\,\text{Sin}\,\alpha\,\text{Cos}\,\beta.$$

Also geht der unmittelbar vorhergehende Ausdruck in folgenden über

$$\frac{dx}{da}\left[\frac{dy}{db}\cdot\frac{dz}{dc}-\frac{dy}{dc}\cdot\frac{dz}{db}\right]=$$

$$\left(\frac{dr}{da}\text{Cos}\,\alpha-\frac{rd\alpha}{da}\text{Sin}\,\alpha\right)\left[\left(\frac{d\alpha d\beta}{dbdc}-\frac{d\alpha d\beta}{dcdb}\right)r^2\,\text{Sin}\,\alpha\,\text{Cos}\,\alpha\right.$$

$$\left.-\left(\frac{d\beta dr}{dbdc}-\frac{d\beta dr}{dcdb}\right)r\,\text{Sin}^2\,\alpha\right].$$

Auf dieselbe Art erhält man analoge Ausdrücke für

$$\frac{dx}{db}\left[\frac{dy}{dc}\cdot\frac{dz}{da}-\frac{dy}{da}\cdot\frac{dz}{dc}\right] \text{ und für}$$

$$\frac{dx}{dc}\left[\frac{dy}{da}\cdot\frac{dz}{db}-\frac{dy}{db}\cdot\frac{dz}{da}\right],$$

wenn man in der vorhergehenden umständlich gegebenen Entwicklung die Grössen $a\,b\,c$ respective für die zweyte in $b\,c\,a$, und für die dritte in $c\,a\,b$ verwandelt.

Addirt man dann alle drey Ausdrücke, und bemerkt man, dass alle Glieder, deren Factoren die Quadrate

von dr, oder $d\alpha$ oder $d\beta$ sind, sich gegenseitig aufheben, so erhält man für den gesuchten Werth des körperlichen Inhalts des schiefen Parallelepipedums

$$k = \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{dr}{da}\right)\left[\left(\frac{d\alpha}{db}\right)\left(\frac{d\beta}{dc}\right) - \left(\frac{d\alpha}{dc}\right)\left(\frac{d\beta}{db}\right)\right] \\ + \left(\frac{dr}{db}\right)\left[\left(\frac{d\alpha}{dc}\right)\left(\frac{d\beta}{da}\right) - \left(\frac{d\alpha}{da}\right)\left(\frac{d\beta}{dc}\right)\right] \\ + \left(\frac{dr}{dc}\right)\left[\left(\frac{d\alpha}{da}\right)\left(\frac{d\beta}{db}\right) - \left(\frac{d\alpha}{db}\right)\left(\frac{d\beta}{da}\right)\right] \end{array} \right\} . r^2 \operatorname{Sin}\alpha . da . db . dc.$$

Die Ausdrücke von k, welche wir in Nr. III. und IV. gegeben haben, sind bekanntlich in der Lehre von der Bewegung der Flüssigkeiten von grossem Nutzen.

6. §. Gegen einen ersten Ort sey die Lage eines zweyten, und die eines dritten Ortes gegeben. Man suche die Lage des dritten Ortes gegen den zweyten. Nimmt man, ohne der Allgemeinheit der Aufgabe zu schaden, den ersten Ort für den Anfang der Coordinaten an, und nennt x y z die gegebenen Coordinaten des zweyten Ortes, die dessen Lage und Entfernung gegen den ersten Ort bestimmen, und $x' y' z'$ die gegebenen Coordinaten des dritten Ortes gegen den ersten, und endlich $x'' y'' z''$ die gesuchten Coordinaten des dritten Ortes gegen den zweyten, so ist sofort, wie man leicht sieht,

$$x'' = x' - x$$
$$y'' = y' - y$$
$$z'' = z' - z.$$

Es sey r die Entfernung des zweyten Ortes von dem ersten, d die Neigung dieser Entfernung gegen die Ebene der xy, und a der Winkel der Projection von r in der Ebene der xy mit der Achse der x, so hat man

$$x = r \operatorname{Cos} d \operatorname{Cos} a$$
$$y = r \operatorname{Cos} d \operatorname{Sin} a$$
$$z = r \operatorname{Sin} d,$$

und wenn man dieselben Grössen für den dritten und

ersten Ort durch r′ d′ a′, und für den dritten und zweyten Ort durch r″ d″ a″ bezeichnet, so ist

$x' = r' \operatorname{Cos} d' \operatorname{Cos} a'$ und $x'' = r'' \operatorname{Cos} d'' \operatorname{Cos} a''$

$y' = r' \operatorname{Cos} d' \operatorname{Sin} a'$ $y'' = r'' \operatorname{Cos} d'' \operatorname{Sin} a''$

$z' = r' \operatorname{Sin} d'$ $z'' = r'' \operatorname{Sin} d''$.

Sucht man daher den Ort des dritten Körpers gegen den zweyten, statt durch seine Coordinaten x″ y″ z″ wie zuvor, durch die Grössen a″ d″ r″ auszudrücken, so hat man

$$\operatorname{tg} a'' = \frac{y'-y}{x'-x}$$

$$\operatorname{tg} d'' = \frac{z'-z}{x'-x} \operatorname{Cos} a'' = \frac{z'-z}{y'-y} \operatorname{Sin} a''.$$

$$r'' = \frac{z'-z}{\operatorname{Sin} d''} = \frac{y'-y}{\operatorname{Sin} a'' \operatorname{Cos} d''} = \frac{x'-x}{\operatorname{Cos} a'' \operatorname{Cos} d''}.$$

Geht die Ebene der x y zugleich durch den ersten und zweyten Körper, so ist d und z gleich Null, und $x = r \operatorname{Cos} a$, $y = r \operatorname{Sin} a$.

I. Ist überhaupt

$$R = r \operatorname{Cos} d$$
$$R' = r' \operatorname{Cos} d'$$
$$R'' = r' \operatorname{Cos} d'',$$

so wird man aus dem Vorhergehenden leicht folgende Ausdrücke ableiten

$$R' \operatorname{Cos}(a'-N) - R \operatorname{Cos}(a-N) = R'' \operatorname{Cos}(a''-N)$$
$$R' \operatorname{Sin}(a'-N) - R \operatorname{Sin}(a-N) = R'' \operatorname{Sin}(a''-N)$$
$$R' \operatorname{tg} d' - R \operatorname{tg} d = R'' \operatorname{tg} d'',$$

wo N eine willkührliche Grösse ist. Verschiedene Werthe von N werden daher verschiedene Auflösungen der Aufgabe geben. Ist z. B. $N = a$, so ist

$$P = \frac{R'}{R} \operatorname{Sin}(a'-a),\ Q = \frac{R'}{R} \operatorname{Cos}(a'-a) - 1,$$

$$\operatorname{tg}(a''-a) = \frac{P}{Q},\ R'' = \frac{P R}{\operatorname{Sin}(a''-a)} = \frac{Q R}{\operatorname{Cos}(a''-a)} \text{ und}$$

$$\operatorname{tg} d'' = \frac{R' \operatorname{tg} d' - R \operatorname{tg} d}{R''}.$$

Eine ähnliche Auflösung erhält man für $N = a'$, ist endlich

$$N = \frac{a + a'}{2},$$

so hat man

$$\operatorname{tg}(a'' - \tfrac{1}{2}(a + a')) = \frac{R' + R}{R' - R} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(a' - a)$$

$$R'' = (R' + R)\frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a' - a)}{\operatorname{Sin}(a'' - \frac{1}{2}(a' + a))} = (R' - R)\frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a' - a)}{\operatorname{Cos}(a'' - \frac{1}{2}(a' + a))},$$

und $\operatorname{tg} d''$ wie zuvor.

II. Ist der erste Ort der Mittelpunct der Sonne, der zweyte der der Erde, und endlich der dritte der eines Planeten, so geben die vorhergehenden Ausdrücke den von der Erde gesehenen (geocentrischen) Ort eines Planeten, wenn man die von der Sonne gesehenen (heliocentrischen) Orte der Erde und des Planeten kennt.

Die Planeten bewegen sich bekanntlich, so wie die Erde, in Ellipsen, deren ein Brennpunct der Mittelpunct der Sonne ist, und da die Ebenen dieser Ellipsen gegen die Ebene der Erdbahn (die Ecliptik) nur wenig geneigt sind, so wird man die Planeten von der Erde aus immer in einer gewissen Zone sehen, deren Gränzen die geocentrischen Orte der Planeten nicht übersteigen können. Um diese Gränzen zu bestimmen, wollen wir wieder die Gleichungen vornehmen,

$$x' - x = r'' \operatorname{Cos} d'' \operatorname{Cos} a''$$

$$y' - y = r'' \operatorname{Cos} d'' \operatorname{Sin} a''$$

$$z' - z = r'' \operatorname{Sin} d''.$$

Es lässt sich aber leicht zeigen, dass die Grössen a'' und d'' Functionen von zwey andern Grössen u und U sind, von denen die erste von dem Orte des Planeten in seiner Bahn, und die andern auf dieselbe Art von dem Orte der Erde in ihrer Bahn abhängt. Daraus folgt, dass auch die Grössen $d a''$ und $d d''$ Functionen

von d u und d U seyn wollen, und dass wir daher, ohne diese Grössen u und U selbst zu kennen, annehmen dürfen

$$d\,a'' = p\,d\,u + P\,d\,U$$
$$d\,d'' = q\,d\,u + Q\,d\,U,$$

wo p q und P Q Grössen sind, die den Bedingungen der Aufgabe gemäss zu bestimmen sind.

Setzt man in den beyden letzten Gleichungen die Grösse a″ constant, also d a″ = o, so hat man

$$\left(\frac{d\,d''}{d\,u}\right) = \frac{P\,q - p\,Q}{P},$$

und man sieht, dass für denselben Werth von a″ die Grösse d″ so lange zu- oder abnehmen wird, bis endlich der Werth von d″ für

$$p\,Q - P\,q = o$$

ein Grösstes oder ein Kleinstes wird, und dass daher dieser Werth von d″ für jenes a″ die Gränze jener Zone bezeichnen wird, ausser welcher der Planet von der Erde nicht mehr gesehen werden kann. Die letzte Gleichung enthält also die Auflösung unsers Problems.

Um aber die Werthe der Grössen p q P Q zu finden, hat man aus dem Vohergehenden

$$\operatorname{tg} a'' = \frac{y' - y}{x' - x},$$

$$\operatorname{tg} d'' = \frac{z' - z}{x' - x}\operatorname{Cos} a'',$$

und von diesen beyden Ausdrücken sind die partiellen Differentialien zu nehmen. Man erhält so

$$p = \left(\frac{d\,a''}{d\,u}\right) = \left\{\frac{(x' - x)\frac{d\,y'}{d\,u} - (y' - y)\frac{d\,x'}{d\,u}}{(x' - x)^2}\right\}\operatorname{Cos}^2 a'',$$

oder wenn man die vorhergehenden Werthe von x′ — x, y′ — y substituirt,

$$p = \frac{d\,x'\operatorname{Sin} a'' - d\,y'\operatorname{Cos} a''}{r''\operatorname{Cos} d''.\,d\,u},$$

und eben so

$$q = \frac{d x' \operatorname{Cos} a'' \operatorname{Sin} d'' + d y' \operatorname{Sin} a'' \operatorname{Sin} d'' - d z' \operatorname{Cos} d''}{r'' \, d u},$$

und eben so, wenn man in Beziehung auf U differentiirt,

$$P = \frac{- d x \operatorname{Sin} a'' + d y \operatorname{Cos} a''}{r'' \operatorname{Cos} d'' . d U},$$

$$Q = \frac{- d x \operatorname{Cos} a'' \operatorname{Sin} d'' - d y \operatorname{Sin} a'' \operatorname{Sin} d'' + d z \operatorname{Cos} d''}{r'' \, d U}.$$

Substituirt man diese Werthe in der obigen Gleichung

$$p Q - P q = o,$$

so erhält man, nach einigen einfachen Reductionen,

$$\begin{aligned} o = & d x' (y d z - z d y) + d x (y' d z' - z' d y') \\ & + d y' (z d x - x d z) + d y (z' d x' - x' d z') \\ & + d z' (x d y - y d x) + d z (x' d y' - y' d x') \ldots . (A), \end{aligned}$$

und diese Gleichung enthält allgemein die Relation zwischen den Orten der Erde und des Planeten, bey welchen der geocentrische Ort des letzten in die Gränze jener Zone fällt. Man wird sich übrigens leicht überzeugen, dass die letzte Gleichung ausdrückt, dass die Tangenten der Bahnen an den Orten der Erde und des Planeten in *einer* Ebene liegen. Denn sind

$$\xi = a \zeta + \alpha . \quad \upsilon = b \zeta + \beta \quad \text{und}$$
$$\xi = a' \zeta + \alpha', \quad \upsilon = b' \zeta + \beta'$$

die Gleichungen zweyer geraden Linien, und will man ausdrücken, dass sie beyde in *einer* Ebene liegen, das heisst, dass sie sich schneiden, so hat man (Capitel I. §. 17. II) die Bedingungsgleichung

$$\frac{a - a'}{b - b'} = \frac{\alpha - \alpha'}{\beta - \beta'}.$$

Es sind aber die Gleichungen der Tangente des Planeten (Capitel III. §. 6.)

$$\xi - x' = (\zeta - z') \frac{d x'}{d z'}$$

$$\upsilon - y' = (\zeta - z') \frac{d y'}{d z'},$$

wo ξ υ ζ die veränderlichen Grössen, und x' y' z' den Ort der Bahn des Planeten bezeichnen, an welchem die Tangente gezogen werden soll.

Eben so sind die Gleichungen der Tangente der Erdbahn

$$\xi - x = (\zeta - z) \frac{dx}{dz}$$

$$\upsilon - y = (\zeta - z) \frac{dy}{dz}.$$

Vergleicht man diese Ausdrücke mit den Vorhergehenden, so ist

$$a = \frac{dx'}{dz'} \qquad \alpha = x' - \frac{z'dx'}{dz'}$$

$$b = \frac{dy'}{dz'} \qquad \beta = y' - \frac{z'dy'}{dz'}$$

$$a' = \frac{dx}{dz} \qquad \alpha' = y - \frac{zdx}{dz}$$

$$b' = \frac{dy}{dz} \qquad \beta' = y - \frac{zdy}{dz}.$$

Substituirt man also diese Werthe in der obigen Gleichung

$$\frac{a - a'}{b - b'} = \frac{\alpha - \alpha'}{\beta - \beta'},$$

so erhält man die Gleichung (A) wieder.

7. §. Wir haben in dem neunten und zehnten Capitel mehrere Flächen betrachtet, die durch die Bewegung einer geraden Linie entstehen. Dieselben Untersuchungen lassen sich nun auch auf solche Flächen ausdehnen, welche durch die Bewegung anderer gegebenen krummen Linien entstehen, nur werden, wie sich voraussehen lässt, die hierher gehörenden Entwickelungen zusammen gesetzter seyn. Nehmen wir, um diess durch ein Beyspiel zu zeigen, an, dass die erzeugende Curve ein Kreis sey, der sich so bewegt, dass seine Ebene immer senkrecht auf der gegebenen Curve stehe, die der Mittelpunct jenes Kreises durchlauft,

und suchen wir die Fläche, welche von der Peripherie dieses Kreises erzeugt wird.

Sind x y z die rechtwinklichten Coordinaten eines Punctes der gesuchten Fläche, und x' y' z' die des Mittelpunctes des erzeugenden Kreises, und

$$x = \psi z, \; y = \varphi z$$

die Gleichungen der Curve, welche der Mittelpunct des Kreises durchlauft, so hat man offenbar auch

$$x' = \psi z', \; y' = \varphi z'.$$

Da die Distanz des Punctes der Fläche von dem Mittelpuncte des Kreises immer gleich dem Halbmesser a des Kreises seyn muss, so ist

$$(z - z')^2 + (y - \varphi z')^2 + (x - \psi z')^2 = a^2 \ldots (I).$$

Dies vorausgesetzt, hat man nur noch auszudrücken, dass diese zwey Puncte in einer auf der gegebenen Curve normalen Ebene sind.

Es ist aber die Gleichung der normalen Ebene, die durch den Mittelpunct des Kreises geht,

$$z - z' + (y - \varphi z') \varphi' z' + (x - \psi z') \psi' z' = o \ldots II,$$

wo $\varphi' z = \frac{d \, . \, \varphi z}{d z}$ und $\psi' z = \frac{d \, . \, \psi z}{d z}$ gesetzt wurde.

Da die Gleichung II auch für den Punct der gesuchten Fläche gehört, so enthält sie, in Verbindung mit der Gleichung I, die Auflösung unserer Aufgabe.

Ist nähmlich die Curve gegeben, so sind auch $\varphi z'$ und $\psi z'$, so wie ihre Differentialien $\varphi' z'$ und $\psi' z'$ als Functionen von z' gegeben. Eliminirt man daher, aus den beyden Gleichungen I, II die Grösse z', nachdem man in ihnen für x' und y' ihre Werthe $x' = \psi z'$ und $y' = \varphi z'$ substituirt hat, so wird das Resultat der Elimination von z' aus jenen beyden Gleichungen die Gleichung der gesuchten Fläche seyn.

Will man aber nur allgemein die Erzeugung der Fläche ausdrücken, ohne auf die individuelle Gestalt jener Curve Rücksicht zu nehmen, so wird man die Functionen φ und ψ als ganz willkührlich betrachten,

und sie *nur durch Differentiation* eliminiren. Die erste der Gleichungen I gibt, wenn man sie, da die Grössen x und y von einander unabhängig sind, zuerst in Beziehung auf x und dann auf y differentiirt

$$\left.\begin{aligned} (z - z')\frac{dz}{dx} + x - \psi z' = 0 \\ (z - z')\frac{dz}{dx} + y - \varphi z' = 0 \end{aligned}\right\} \text{III.}$$

Substituirt man diese Werthe von $x - \psi z'$ und $y - \varphi z'$ in der Gleichung I, und setzt der Kürze wegen

$$1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 = k^2,$$

so hat man

$$z - z' = \frac{a}{k},$$

also sind auch die Gleichungen (III)

$$\frac{a}{k} \cdot \frac{dz}{dx} + x = \psi z'$$

$$\frac{a}{k} \cdot \frac{dz}{dy} + y = \varphi z',$$

woraus folgt

$$\frac{a}{k} \cdot \frac{dz}{dx} + x = \text{Funct}\left(\frac{a}{k} \cdot \frac{dz}{dy} + y\right) \ldots \text{IV},$$

und dies ist die gesuchte Differentialgleichung unserer Fläche. Sie ist in Beziehung auf ihre Differentialien der ersten Ordnung, und enthält noch eine willkührliche Function. Will man auch diese Function noch verschwinden lassen, so wird man durch ein ähnliches Verfahren, indem man die letzte Gleichung wieder partiell differentiirt, erhalten

$$k^3 + ak\left[\left(1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)\frac{d^2z}{dx^2} - 2\,\frac{dz}{dx} \cdot \frac{dz}{dy} \cdot \frac{d^2z}{dx\,dy} + \left(1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right) \cdot \frac{d^2z}{dy^2}\right]$$

$$+ a^2\left[\frac{d^2z}{dx^2} \cdot \frac{d^2z}{dy^2} - \left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)^2\right] = 0 \ldots (V),$$

und diess ist ebenfalls eine Gleichung der gesuchten Fläche, die keine willkührliche Function mehr enthält. Unsere Fläche wird daher entweder durch die beyden Gleichungen I, II zusammen genommen, oder durch die Gleichung IV, oder endlich durch die Gleichung V gegeben, weil jede dieser Gleichungen ausdrückt, dass eine Fläche durch die Bewegung eines Kreises entstanden ist, dessen Ebene immer senkrecht auf der leitenden Curve steht, in welcher der Mittelpunct des Kreises fortgeht.

I. Wäre auch noch der Halbmesser a nach einem gegebenen Gesetze veränderlich, so hätte man noch eine Function $a = F z'$, und die zuletzt erhaltene Differentialgleichung (V), die keine willkührliche Constante mehr enthalten soll, würde dadurch auf einen Grad höher steigen. Dann wären aber auch in dieser Gleichung alle Rotationsflächen, so wie alle cylindrischen und conischen Flächen enthalten, wenn die beyden letzten eine kreisförmige Basis haben.

II. Übrigens ist die Gleichung I offenbar die einer Kugel des Halbmessers a, deren Mittelpunct in dem Puncte der leitenden Curve ist, deren Ordinate z' ist. Sieht man also z' als einen unveränderlichen Parameter an, so gehört die Gleichung I für alle Kugeln desselben Halbmessers, deren Mittelpuncte alle auf jener Curve sind. Die Gleichung II aber ist das Differential der Gleichung I in Beziehung auf z', und da beyde Gleichungen zugleich Statt haben, so zeigt die zweyte an, dass man bey allen jenen Kugeln *nur die Puncte* betrachten soll, deren Coordinaten x y z sich nicht ändern, während der Mittelpunct seine Lage ändert, das heisst, die gesuchte Fläche ist die gemeinschaftliche *einhüllende* Fläche (Capitel VII.) aller jener Kugeln.

III. Man kann endlich auch die Gleichung unserer Fläche durch die Betrachtung finden, dass einer der

zwey Krümmungs-Radien dieser Fläche constant und gleich a seyn muss. Behält man die Bezeichnung der Grössen k, g, h des §. 5. Capitels IV. bey, so ist also

$$a = -\frac{2k^3}{h + \sqrt{h^2 - 4k^2 g}},$$

oder, wenn man das Wurzelzeichen wegbringt,

$$k^4 + a k . h + a^2 g = o,$$

welcher Ausdruck identisch mit der oben gefundenen Gleichung (V) ist.

IV. Sucht man überhaupt die endliche Gleichung der Fläche, deren ein Krümmungsradius gleich der constanten Grösse a ist, so wird man zu diesem Zwecke am bequemsten die Gleichungen (I) des §. 11. Cap. IV. anwenden. Behält man die dort angenommenen Bezeichnungen bey, und setzt $R = a$, so sind jene Gleichungen

$$a\,dX = dx, \quad a\,dY = dy, \quad a\,dZ = dz,$$

und ihre Integralien

$$x - aX = \alpha, \quad y - aY = \beta, \quad z - aZ = \gamma,$$

wo die Grössen $\alpha\ \beta\ \gamma$ mit einander zugleich constant und zugleich veränderlich, wo also je zwey dieser Grössen Functionen der dritten sind. Setzt man daher $\beta = \psi\gamma$ und $\alpha = \varphi\gamma$, so hat man

$$x - a X = \varphi (z - a Z)$$
$$y - a Y = \psi (z - a Z).$$

Jene drey ersten Gleichungen aber, verbunden mit den Ausdrücken

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1,$$

geben

$$(x - \varphi\gamma)^2 + (y - \varphi\gamma)^2 + (z - \gamma)^2 = a^2,$$

woraus folgt, dass die gesuchte Fläche die einhüllende Fläche des Raumes ist, welchen eine Kugel durchlauft, deren Halbmesser gleich a ist, und deren Mittelpunct irgend eine willkührliche Curve beschreibt.

8. §. Die Untersuchungen der Flächen, deren Krümmungs-Radien eine gegebene Eigenschaft haben, führt auf sehr interessante Betrachtungen, von denen wir hier nur einige der vorzüglichsten kurz mittheilen wollen.

Man suche die Fläche, in welcher einer der beyden Krümmungs-Radien R immer unendlich ist.

Die Gleichungen (1) des (Capitels IV. §. 11.) geben hier

$$dX = o, \quad dY = o, \quad dZ = o,$$

wo die dritte dieser Gleichungen eine Folge der beyden andern ist. Die Integrale der beyden ersten aber sind

$$p = \alpha, \quad q = \beta,$$

und dies sind zugleich die Gleichungen der Krümmungslinien, für welche R unendlich ist. Sie zeigen an, dass für alle Puncte dieser Krümmungslinien die tangirende Ebene immer dieselbe ist, und dies ist (nach Capitel X.) der ausschliessende Character der *developpablen Flächen.*

Differentiirt man aber die beyden letzten Gleichungen, so erhält man

$$r\,dx + s\,dy = o, \quad s\,dx + t\,dy = o,$$

also auch, wenn man $\frac{dy}{dx}$ aus diesen Ausdrücken eliminirt,

$$rt - s^2 = o,$$

und diese Gleichung gibt einen andern Character unserer Fläche, der von der Direction der Krümmungslinie, das heisst, von $\frac{dy}{dx}$ unabhängig ist.

Nach dem, was im Capitel X. gesagt wurde, gehört die letzte Gleichung für die developpablen Flächen.

Aus denselben Gleichungen $p = \alpha$, $q = \beta$ folgt noch

$$dz = \alpha\,dx + \beta\,dy,$$

deren Integral

$$z = \alpha x + \beta y + \gamma$$

ist, und woraus folgt, dass die Krümmungslinie eine ebene Curve ist. Für eine und dieselbe Krümmungslinie sind die Grössen $\alpha\ \beta\ \gamma$ zugleich constant, und für verschiedene Krümmungslinien sind sie zugleich veränderlich, also ist $\beta = \varphi\,\alpha$ und $\gamma = \psi\,\alpha$, daher gehen auch die vorhergehenden Gleichungen in folgende über

$$q = \varphi\, p \quad \text{und}$$
$$z - p\,x - q\,y = \psi\, p.$$

Vergleiche Capitel X. §. 4.

I. Man suche die Fläche, deren zwey Krümmungs-Radien einander gleich, aber von entgegengesetzten Zeichen sind.

Sind ρ und ρ' diese Krümmungs-Radien, so hat man

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} = 0,$$

also auch (Capitel IV. §. 11.)

$$\left(\frac{dX}{dx}\right) + \left(\frac{dY}{dy}\right) = 0,$$

welches die Gleichung der gesuchten Fläche in partiellen Differentialien ist, und aus dieser Form der Gleichung erkennt man sofort, dass die gesuchte Fläche jene ist, deren Area zwischen gegebenen Gränzen ein Minimum ist, denn da (a. a. O. §. 11. Nro. II.)

$$X = -\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\ Y = -\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

ist, so ist auch

$$X = -\frac{d.\sqrt{1+p^2+q^2}}{dp},\ Y = -\frac{d.\sqrt{1+p^2+q^2}}{dq}.$$

Aber die Gleichung der Fläche, welche das doppelte Integral $\int\int P\,dx\,dy$ zum Minimum macht, wo P bloss eine Function von p und q ist, ist bekanntlich

$$\left(\frac{d.\left(\frac{dP}{dp}\right)}{dx}\right)+\left(\frac{d.\left(\frac{dP}{dq}\right)}{dy}\right)=0$$

Ist also $P=\sqrt{1+p^2+q^2}$, so ist $\int\int P\,dx\,dy$ die Area der Fläche, also auch die Gleichung des Minimums

$$\left(\frac{dX}{dx}\right)+\left(\frac{dY}{dy}\right)=0.$$

II. Man suche die Fläche, deren zwey Krümmungsradien gleich sind und dieselbe Lage haben.

Um die Gleichung dieser Fläche in partiellen Differentialien zu erhalten, muss man ausdrücken, dass die Gleichung (5) des §. 11 Cap. IV zwey gleiche Wurzeln habe, wodurch man erhält

$$\left[\left(\frac{dX}{dx}\right)+\left(\frac{dY}{dy}\right)\right]^2-4\left[\left(\frac{dX}{dx}\right)\left(\frac{dY}{dy}\right)-\left(\frac{dX}{dy}\right)\left(\frac{dY}{dx}\right)\right]=0$$

oder wenn man die a. a. O. gegebenen Werthe von $\frac{dX}{dx}$.. substituirt,

$$[(t+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t]^2-4(1+p^2+q^2)(rt-s^2)=0$$

welches die gesuchte Gleichung der Fläche ist. Man wird sich leicht überzeugen, dass sie entweder für eine Kugel, oder für eine Ebene gehört.

9. §. Wir haben oben (Cap. VIII. §. 8) gesehen, dass jede Fläche der zweyten Ordnung von einem sie einhüllenden Kegel immer in einer *ebenen* Curve berührt werde. Wir wollen die Ebene dieser Curve, der Kürze wegen, die Berührungsebene nennen, und die Flächen aufsuchen, welche durch die auf einander folgenden Durchschnittslinien dieser Berührungsebene entstehen, wenn der einhüllende Kegel sich nach einem gegebenen Gesetze bewegt.

Sind abc die Coordinaten des Scheitels des Kegels, so ist dessen Gleichung

$$z - c = (x - a)\left(\frac{dz}{dx}\right) + (y - b)\left(\frac{dz}{dy}\right) \ldots\ldots (VI).$$

Die Gleichung der Flächen der zweyten Ordnung aber ist

$$A^2 x^2 + B^2 y^2 + C^2 z^2 = 1 \ldots\ldots (VII).$$

Soll also die Fläche der zweyten Ordnung von der Fläche des Kegels eingehüllt werden, so müssen nach dem Vorhergehenden die Werthe der Grössen $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ und $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ in den beyden vorhergehenden Gleichungen dieselben seyn. Man hat daher für eine der beyden Gleichungen der Berührungscurve

$$z - c = -(x - a)\frac{A^2 x}{C^2 z} - (y - b)\frac{B^2 y}{C^2 z},$$

das heisst

$$A^2 a x + B^2 b y + C^2 c z = 1 \ldots\ldots (VIII)$$

die Gleichung einer Ebene, also ist, wie Cap. VIII. §. 8, die Curve der Berührung eines Kegels mit einer Fläche der zweyten Ordnung eine *ebene* Curve.

I. Die letzte Gleichung ist auch

$$z = -\frac{A^2 a x}{C^2 c} - \frac{B^2 b y}{C^2 c} + \frac{1}{C^2 c} \ldots\ldots (VIII'),$$

und man sieht, dass die Coefficienten von x und y dieselben bleiben, so lang die Verhältnisse $\frac{a}{c}$ und $\frac{b}{c}$ dieselben sind. Werden daher die drey Grössen a b c selbst veränderlich, aber so angenommen, dass sie immer durch die zwey Gleichungen

$$a = mc$$
$$b = nc$$

gegeben sind, so werden demungeachtet die Coefficienten von x und y in dem Ausdrucke VIII' unveränderlich bleiben. Da aber die beyden letzten Gleichungen für eine gerade Linie gehören, die durch den Anfang der Coordinaten geht, so folgt daraus: dass die Berüh-

rungsebene in ihrer Lage unverändert bleibt, wenn auch der Scheitel des Kegels sich auf einer geraden Linie bewegt, die durch den Anfang der Coordinaten geht. Die Berührungsebene bewegt sich nähmlich dann parallel mit sich selbst.

II. Der constante Theil der Gleichung VIII', oder die Grösse $\frac{1}{C^2 c}$ stellt offenbar die verticale Ordinate des Punctes vor, in welchem die Achse der z von der Berührungsebene geschnitten wird. Dieser Punct bleibt also unverändert, so lange die Grösse c unverändert bleibt, wie auch a und b sich ändern mögen, d. h. wenn der einhüllende Kegel sich so bewegt, dass sein Scheitel eine horizontale Ebene durchläuft, die von jener der x y um eine willkührliche Grösse c entfernt ist, so wird die Berührungsebene die Achse der z immer in demselben Puncte schneiden, und die Distanz dieses Punctes vom Anfangspuncte der Coordinaten ist gleich $\frac{1}{C^2 c}$, eine Grösse, die von A und B ganz unabhängig ist.

10. §. Der Scheitel des einhüllenden Kegels bewege sich auf einer gegebenen Curve von doppelter Krümmung. Man suche die Fläche, welche die auf einander folgenden Durchschnittslinien der Berührungsebenen enthält.

Da diese Durchschnittslinien alle gerade Linien sind, so wird die gesuchte Fläche eine developpable Fläche seyn. Es seyen

$$F(a\,b\,c) = 0 \qquad \text{und} \qquad f(a\,b\,c) = 0 \;\ldots\ldots\;(\mathrm{IX})$$

die Gleichungen der gegebenen Curve. Differentiirt man die Gleichung VIII in Beziehung auf a b c, während x y z constant bleibt, so hat man

$$A^2 x\,d a + B^2 y\,d b + C^2 z\,d c = 0 \;\ldots\ldots\;(\mathrm{X})$$

eine Gleichung, die man immer von ihren Differentialien befreyen kann, wenn man die beyden Gleichungen IX ebenfalls differentiirt. Eliminirt man dann aus den

vier Gleichungen VIII, IX und X die drey Grössen a b c, so erhält man die Gleichung jener developpablen Fläche, welche der Ort aller Durchschnittslinien der verschiedenen berührenden Ebenen ist.

I. Ist die den Scheitel des Kegels leitende Curve eine *ebene* Curve, und deren Gleichungen

$$c = Da + Eb + F$$
$$b = \varphi a,$$

so wird man mit diesen beyden Gleichungen die zwey folgenden verbinden

$$A^2 ax + B^2 by + C^2 cz = 1$$
$$A^2 x da + B^2 y db + C^2 z dc = 0.$$

Setzt man der Kürze wegen $b = \varphi a$ und $db = \varphi' a da$, und eliminirt b und c, so hat man

$$\left.\begin{array}{l} A^2 ax + B^2 y \,.\, \varphi a + C^2 z(Da + E\varphi a + F) = 1 \\ A^2 x + B^2 y \,.\, \varphi' a + C^2 z(D + E\varphi' a) = 0 \end{array}\right\} XI.$$

Da die Natur der Function φ nicht gegeben ist, so ist es unmöglich, aus diesen beyden Gleichungen die Grösse a zu eliminiren. Um aber doch die *Differentialgleichung* der gesuchten Fläche zu erhalten, wollen wir die erste der beyden vorhergehenden Gleichungen XI in Beziehung auf x y z und a differentiiren, wodurch man erhält

$$[A^2 x + B^2 y \varphi' a + C^2 z(D + E\varphi' a)]\, da$$
$$+ A^2 a dx + B^2 \varphi a \,.\, dy + C^2(Da + E\varphi a + F)\left(\frac{dz}{dx} \,.\, dx + \frac{dz}{dy} \,.\, dy\right) = 0.$$

Setzt man der Kürze wegen $\frac{dz}{dx} = p.\ \frac{dz}{dy} = q$, und bemerkt, dass der Factor von da gleich Null ist, so hat man

$$[A^2 a + C^2 p(Da + E\varphi a + F)]\, dx + [B^2 \varphi a + C^2 q(Da + E\varphi a + F)]\, dy = 0,$$

und da die Grössen d x und d y von einander unabhängig sind,

$$(A^2 + C^2 pD)a + C^2 pE \,.\, \varphi a + C^2 F \,.\, p = 0$$
$$C^2 Dqa + (B^2 + C^2 Eq)\varphi a + C^2 Fq = 0,$$

woraus daher folgt

$$a = - \frac{B^2 C^2 F . p}{A^2 (B^2 + C^2 E q) + B^2 C^2 D p}$$

$$\varphi a = - \frac{A^2 C^2 F . q}{A^2 (B^2 + C^2 E q) + B^2 C^2 D p}.$$

Dies vorausgesetzt, geht also die erste der Gleichungen XI in folgende über

$$(A^2 x + C^2 D z) a + (B^2 y + C^2 E z) \varphi a + C^2 F z = 1,$$

das heisst, wenn man die vorhergehenden Werthe von a und φ a substituirt,

$$\frac{A^2 B^2 (z - p x - q y)}{A^2 (B^2 + C^2 E q) + B^2 C^2 D p} = \frac{1}{C^2 F^2},$$

oder, wenn man die Nenner wegbringt

$$z - \frac{1}{C^2 F} = \left(x + \frac{D}{A^2 F}\right) p + \left(y + \frac{E}{B^2 F}\right) q \ldots . (XII).$$

die Gleichung der gesuchten Fläche, welche die auf einander folgenden Durchschnitte der Berührungsebenen enthält; oder, was dasselbe ist, die Gleichung der Fläche, welche von den auf einander folgenden Berührungsebenen tangirt wird.

Unter dieser Form sieht man, dass die gesuchte developpable Fläche eine *conische* Fläche ist, wovon die Coordinaten des Scheitels sind

$$\frac{1}{C^2 F}, - \frac{D}{A^2 F}, - \frac{E}{B^2 F},$$

und da diess Resultat ganz unabhängig von der Gestalt der den Scheitel leitenden Curve ist, so folgt, dass, wenn sich der Scheitel eines Kegels, der einer Fläche der zweyten Ordnung umschrieben ist, auf irgend einer *Ebene* bewegt, dass dann die Berührungsebene in allen ihren Lagen durch einen und denselben Punct geht, weil sie sonst keinen Kegel beschreiben könnte.

II. Wären die Grössen D und E Null, d. h. wäre die Ebene der leitenden Curve horizontal, so wird die Gleichung XII folgende

$$z - px - qy = \frac{1}{C^2 F},$$

die für einen Kegel gehört, dessen Scheitel in der Achse der z liegt.

Wäre D, E und F Null, so hätte man

$$z - px - qy = \infty$$

die Gleichung eines Cylinders, dessen Achse vertical ist.

Wäre endlich bloss $F = 0$, so hätte man

$$1 + \frac{C^2 D}{A^2} p + \frac{C^2 E}{B^2} q = 0$$

die Gleichung eines Cylinders, dessen Achse einer geraden Linie parallel ist, deren Gleichungen

$$x = -\frac{C^2 D}{A^2} z + \alpha,$$

$$y = -\frac{C^2 E}{B^2} z + \beta,$$

sind.

11. §. Bisher bewegte sich der Scheitel des umschriebenen Kegels in einer gegebenen Curve. Wir wollen nun annehmen, dass dieser Scheitel sich in einer gegebenen Fläche bewege, deren Gleichung $U = 0$ seyn soll, wo U eine Function von den drey Coordinaten $a\,b\,c$ des Scheitels ist. Es sey $dc = p\,da + q\,db$.

Da auch hier die beyden Gleichungen VIII und X gelten, so gibt die zweyte X, wenn man in ihr den vorhergehenden Werth von dc substituirt,

$$A^2 x + C^2 p z + (B^2 y + C^2 q z) \cdot \frac{db}{da} = 0.$$

Verbindet man mit diesem Ausdrucke die Gleichung VIII oder

$$A^2 a x + B^2 b y + C^2 c z = 1,$$

so hat man die zwey Gleichungen, welche für den Durchschnitt je zwey nächstfolgender Berührungsebenen gehören. Die Lage dieser geraden Durchschnittslinie hängt von dem Werthe der Grösse $\frac{db}{da}$ ab.

Differentiirt man also die letzte Gleichung bloss in Beziehung auf $\frac{db}{da}$, so erhält man eine Gleichung, die sich auf den Durchschnittspunct dieser geraden Linie mit ihrer nächstfolgenden bezieht. Man erhält so

$$A^2 x + C^2 z . \frac{dc}{da} = o$$

$$B^2 y + C^2 z . \frac{dc}{db} = o,$$

und der Ort aller dieser Durchschnittspuncte je zwey nächster Durchschnittslinien der Berührungsebenen gibt eine *Fläche*, welcher Fläche Gleichung man erhalten wird, wenn man nur die Grössen a b c aus den vier folgenden Gleichungen eliminirt

$$\left.\begin{array}{l} U = o \\ A^2 a x + B^2 b y + C^2 c z = 1 \\ A^2 x \ + C^2 z . \frac{dc}{da} = o \\ B^2 y \ + C^2 z . \frac{dc}{db} = o \end{array}\right\} \text{XIII.}$$

I. Wir wollen, um diess durch einen besondern Fall deutlich zu machen, voraussetzen, dass die leitende Fläche eine Ebene sey, deren Gleichung

$$c = D a + E b + F$$

seyn soll. Man hat also $\frac{dc}{da} = D$, $\frac{dc}{db} = E$, und die Gleichungen XIII gehen in folgende über

$$\left.\begin{array}{l} c = D a + E b + F \\ A^2 a x + B^2 b y + C^2 c z = 1 \\ A^2 x + C^2 D z = o \\ B^2 y + C^2 E z = o \end{array}\right\}$$

Sucht man aus den drey letzten dieser Gleichungen die Werthe von x y z, so erhält man

$$x = -\frac{D}{A^2 F} \qquad y = -\frac{E}{B^2 F} \qquad z = \frac{1}{C^2 F}$$

für die Coordinaten des Durchschnittspunctes von je zwey nächsten Durchschnittslinien der Berührungsebene. Da diese Coordinaten von a b c ganz unabhängig sind, so folgt, dass, wenn der Scheitel des Kegels sich auf eine Ebene bewegt, alle Berührungsebenen immer durch einen und denselben Punct gehen, wie §. 4. I.

II. Wir wollen noch annehmen, dass der Scheitel des Kegels, der einer Fläche der zweyten Ordnung umschrieben ist, sich ebenfalls auf einer Fläche der zweyten Ordnung bewege.

Es sey, wie zuvor, die Gleichung der Fläche der zweyten Ordnung, um welche der Kegel umschrieben ist,

$$A^2 x^2 + B^2 y^2 + C^2 z^2 = 1,$$

und eben so sey die Gleichung der Fläche der zweyten Ordnung, in welcher sich der Scheitel des Kegels bewegt

$$A'^2 a^2 + B'^2 b^2 + C'^2 c^2 = 1,$$

also auch $\frac{dc}{da} = -\frac{A'^2 a}{C'^2 c}$ und $\frac{dc}{db} = -\frac{B'^2 b}{C'^2 c}$.

Die vier Gleichungen XIII werden daher in folgende übergehen

$$\left.\begin{array}{l} A'^2 a^2 + B'^2 b^2 + C'^2 c^2 = 1 \\ A^2 ax + B^2 by + C^2 cz = 1 \\ A^2 C'^2 cx - A'^2 C^2 az = 0 \\ B^2 C'^2 cy - B'^2 C^2 bz = 0 \end{array}\right\}$$

woraus man die drey Grössen a b c eliminiren soll. Setzt man der Kürze wegen

$$A^4 B'^2 C'^2 x^2 + A'^2 B^4 C'^2 y^2 + A'^2 B'^2 C^4 z^2 = G,$$

so findet man

$$a = \frac{A^2 B'^2 C'^2 x}{G}$$

$$b = \frac{A'^2 B^2 C'^2 y}{G}$$

$$c = \frac{A'^2 B'^2 C^2 z}{G},$$

und diese Werthe in der vorhergehenden Gleichung

$$A'^2 a^2 + B'^2 b^2 + C'^2 c^2 = 1$$

substituirt, geben

$$A^4 B'^2 C'^2 x^2 + A'^2 B^4 C'^2 y^2 + A'^2 B'^2 C^4 z^2 = A'^2 B'^2 C'^2 \ldots \text{(XIV)}$$

die Gleichung der gesuchten Fläche, die also ebenfalls eine Gleichung der zweyten Ordnung ist, deren Mittelpunct im Anfange der Coordinaten liegt.

Setzt man A, B, C nach der Ordnung gleich $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ und eben so A', B', C' gleich $\frac{1}{a'}$, $\frac{1}{b'}$, $\frac{1}{c'}$, so ist die Gleichung der umschriebenen Fläche

$$b^2 c^2 x^2 + a^2 c^2 y^2 + a^2 b^2 z^2 = a^2 b^2 c^2,$$

und die der leitenden Fläche

$$b'^2 c'^2 x^2 + a'^2 c'^2 y^2 + a'^2 b'^2 z^2 = a'^2 b'^2 c'^2,$$

also beyde Flächen concentrische Ellipsoiden, deren drey Halb-Achsen a b c und a' b' c' sind. Dies vorausgesetzt, wird die Gleichung (XIV)

$$\frac{a'^2 x^2}{a^4} + \frac{b'^2 y^2}{b^4} + \frac{c'^2 z^2}{c^4} = 1,$$

oder die gesuchte Fläche ist ein den beyden vorigen Ellipsoiden concentrisches Ellipsoid, dessen Halb-Achsen gleich

$$\frac{a^2}{a'} \quad \frac{b^2}{b'} \quad \frac{c^2}{c'},$$

oder gleich den dritten Proportionalen zu den analogen Achsen der beyden ersten Ellipsoiden sind. Vergl. Cap. III. §. 11.

Dreyzehntes Capitel.

Anwendung der analytischen Geometrie auf die Optik.

1. §. Seyen X Y Z die Coordinaten eines leuchtenden Punctes, also die Gleichungen eines seiner Strahlen

$$\left.\begin{array}{l} a(z-Z)=c(x-X) \\ b(z-Z)=c(y-Y) \end{array}\right\}\ldots\ldots(a).$$

Wenn dieser Strahl in irgend einem Puncte x′ y′ z′ eine Fläche

$$\left.\begin{array}{l} F(x'\,y'\,z')=o \quad \text{oder} \\ p\,dx'+q\,dy'+r\,dz'=o \end{array}\right\}\ldots(F)$$

trifft, so wird er in einer anderen geraden Linie reflectirt werden, deren Gleichungen seyn sollen

$$\left.\begin{array}{l} m(z-z')=o(x-x') \\ n(z-z')=o(y-y') \end{array}\right\}\ldots(A).$$

Man nennt *Einfallswinkel* den Winkel des einfallenden Strahls (a) mit der Normale der Fläche (F) in dem Einfallspuncte x′ y′ z′; und *Reflexionswinkel* den Winkel derselben Normale mit dem zurückgeworfenen Strahle (A). Bekanntlich sind diese beyden Winkel einander gleich, oder es ist

$$\frac{ap+bq+cr}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{mp+nq+or}{\sqrt{m^2+n^2+o^2}}\ldots(b),$$

und überdiess liegt der einfallende Strahl, die Normale, und der zurückgeworfene Strahl in einer Ebene, oder es ist

$$m(cq-br)+n(ar-cp)+o(bp-aq)=o\ldots(c).$$

Diese zwey Gleichungen (b), (c) reichen hin, das Verhältniss der Grössen m, n, o zu bestimmen. Setzt man der Kürze wegen

$$P^2 = a^2 + b^2 + c^2$$
$$Q^2 = p^2 + q^2 + r^2$$
$$\text{und } R = ap + bq + cr,$$

so erhält man

$$\frac{m}{o} = \frac{prP^2 + (cq - br)(bp - aq) \pm (ar - cp)R}{r^2P^2 - (cq - br)^2 - (ar - cp)^2}$$
$$\frac{n}{o} = \frac{qrP^2 + (ar - cp)(bp - aq) \pm (br - cq)R}{r^2P^2 - (cq - br)^2 - (ar - cp)^2}.$$

Die obern Zeichen geben $\frac{m}{o} = \frac{a}{c}$, $\frac{n}{o} = \frac{b}{c}$, und sie gehören daher für den einfallenden Strahl (a). Die untern Zeichen aber geben

$$\frac{m}{o} = \frac{2pR - aQ^2}{2rR - cQ^2}$$
$$\frac{n}{o} = \frac{2qR - bQ^2}{2rR - cQ^2},$$

und sie gehören für den reflectirten Strahl. Man kann daher annehmen

$$m = \lambda.(2pR - aQ^2)$$
$$n = \lambda.(2qR - bQ^2)$$
$$o = \lambda.(2rR - cQ^2),$$

wo λ ein unbestimmter Factor ist, welcher später von selbst wieder aus der Rechnung verschwindet.

Da endlich der Punct x′ y′ z′ sowohl der Fläche (F), als auch dem einfallenden Strahle (a) angehört, so ist auch

$$a(z' - Z) = c(x' - X)$$
$$b(z' - Z) = c(y' - Y),$$

und daher

$$a = \lambda'.(x' - X)$$
$$b = \lambda'.(y' - Y)$$
$$c = \lambda'.(z' - Z),$$

wo λ′ wieder ein unbestimmter Factor ist.

2. §. Wir wollen nun unter den reflectirten Strahlen (A) diejenigen suchen, welche einander je zwey und zwey schneiden. Zu diesem Zwecke werden wir die Gleichungen (A) in Beziehung auf x' y' z' differentiiren, und dabey x y z (den Durchschnittspunct je zweyer reflectirter Strahlen) als constant annehmen. Man erhält so, da m n o auch Functionen von $x'y'z'$ sind,

$$\left.\begin{array}{l}(z-z')\,dm - m\,dz' = (x-x')\,do - o\,dx' \\ (z-z')\,dn - n\,dz' = (y-y')\,do - o\,dy'\end{array}\right\} \ldots\ldots (B).$$

Eliminirt man aus den Gleichungen (A), (B) die Grössen $x-x'$, $y-y'$, $z-z'$, so erhält man

$$(n\,dz' - o\,dy')\,dm + (o\,dx' - m\,dz')\,dn$$
$$+ (m\,dy' - n\,dx')\,do = o,$$

oder, wenn man entwickelt,

$$\left[\left(\frac{dm}{dx'}\right)dx' + \left(\frac{dm}{dy'}\right)dy' + \left(\frac{dm}{dz'}\right)dz'\right].(n\,dz' - o\,dy')$$
$$+\left[\left(\frac{dn}{dx'}\right)dx' + \left(\frac{dn}{dy'}\right)dy' + \left(\frac{dn}{dz'}\right)dz'\right].(o\,dx' - m\,dz')$$
$$+\left[\left(\frac{do}{dx'}\right)dx' + \left(\frac{do}{dy'}\right)dy' + \left(\frac{do}{dz'}\right)dz'\right].(m\,dy' - n\,dx') = o \,..\, (C).$$

Dieser Gleichung (C) kann aber durch unzählige Werthe von $\frac{dx'}{dz'}$ und $\frac{dy'}{dz'}$ Genüge geschehen, und sie drückt daher aus, dass durch den Punct $x'y'z'$ eine unzählige Menge von Curven geht, deren Tangenten alle die Gleichungen haben

$$\left.\begin{array}{l}(z-z')\,dx' = (x-x')\,dz' \\ (z-z')\,dy' = (y-y')\,dz'\end{array}\right\} \ldots\ldots (D),$$

und alle diese Curven haben die Eigenschaft, dass für jede derselben in der Reihe von den reflectirten Strahlen (A), welche zu den verschiedenen Puncten dieser Curve gehören, sich je zwey und zwey schneiden.

3. §. Sucht man durch Elimination aus der Gleichung (F) der Fläche, und aus der letzten Gleichung

(C) die Grössen $\frac{dx'}{dz'}$, $\frac{dy'}{dz'}$, so erhält man, da die Gleichung (C) des zweyten Grades ist, zwey Resultate der Form

$$\left.\begin{array}{l} M\,dz' = O\,dx' \\ N\,dz' = O\,dy' \end{array}\right\}\ldots(s) \text{ und}$$

$$\left.\begin{array}{l} M'\,dz' = O'dx' \\ N'\,dz' = O'dy' \end{array}\right\}\ldots\ldots(s').$$

Führt man diese Elimination aus, so erhält man zur Bestimmung der Werthe von $M\,M'\,N\ldots$

$$\alpha = \frac{o\,dn - n\,do}{dx'},\ \beta = \frac{m\,do - o\,dm}{dy'},\ \gamma = \frac{n\,dm - m\,dn}{dz'}$$

$$\delta = \frac{m\,do - o\,dm}{dx'} + \frac{o\,dn - n\,do}{dy'}$$

$$\varepsilon = \frac{n\,dm - m\,dn}{dx'} + \frac{o\,dn - n\,do}{dz'}$$

$$\zeta = \frac{n\,dm - m\,dn}{dy'} + \frac{m\,do - o\,dm}{dz'},$$

$$L^2 = (\delta r + \varepsilon q + \zeta p)^2 + 4pq(\gamma\delta - \varepsilon\zeta) + 4pr(\beta\varepsilon - \delta\zeta) + 4qr(\alpha\zeta - \delta\varepsilon) - 4\beta\gamma p^2 - 4\alpha\gamma q^2 - 4\alpha\beta r^2$$

$$M = pq\zeta + qr\delta - q^2\varepsilon - 2pr\beta + qL$$

$$N = pq\varepsilon + pr\delta - p^2\zeta - 2qr\alpha - pL$$

$$M' = M - 2qL,\ N' = N + 2pL \text{ und}$$

$$O = O' = -\frac{1}{r}(pM + qN) = -\frac{1}{r}(pM' + qN') = 2(q^2\alpha + p^2\beta - pq\delta).$$

Substituirt man endlich diese Werthe von $\frac{dx'}{dz'}$, $\frac{dy'}{dz'}$ in den Gleichungen (D), so erhält man

$$\left.\begin{array}{l} M(z - z') = O(x - x') \\ N(z - z') = O(y - y') \end{array}\right\}\ldots(D) \text{ und}$$

$$\left.\begin{array}{l} M'(x - z') = O'(x - x') \\ N'(z - z') = O'(y - y') \end{array}\right\}\ldots(D'),$$

und diese Linien (D), (D') gehören für zwey Tangenten der Fläche (F), welche beyde durch den Punct x'

$y'z'$ dieser Fläche gehen, und welche die Richtung ausdrücken, nach welcher man von dem Puncte $x'y'z'$ zu einem anderen nächstfolgenden Punct der Fläche gehen muss, damit je zwey nächste reflectirte Strahlen (A) sich schneiden.

I. Da die Gleichungen (s), (s') für jeden Punct der Fläche (F) Statt haben, so drücken ihre Integrale zwey *Systeme* von in dieser Fläche liegenden Curven aus, deren jede die Eigenschaft hat, dass alle reflectirten Strahlen (A), die zu einer dieser Curven gehören, sich je zwey schneiden. In der That thut die Curve (s) oder (s') in jedem ihrer Puncte der Gleichung (C) genug, liegt also immer in der Richtung der Puncte, zu welcher die einander schneidenden reflectirten Strahlen gehören. Wir wollen daher diese Curven (s), (s') *Reflexionscurven* nennen.

II. Die Aufeinanderfolge der reflectirten Strahlen (A), welche durch die Curve (s) gehen, und sich je zwey schneiden, bildet offenbar eine developpable Fläche, welche wir (S) nennen wollen. Der Ort aller Durchschnittspuncte dieser Strahlen wird die *Wendungscurve* (σ) jener developpablen Fläche seyn. Da überdiess die Reflexionscurve (s) in jedem ihrer Puncte von einer der Curven (s') geschnitten wird, so wird auch die developpable Fläche (S) in der Richtung jeder ihrer erzeugenden Geraden (jeder reflectirten Linie) durch eine andere developpable Fläche (S') geschnitten werden, welche Fläche (S') von denjenigen reflectirten, sich schneidenden Strahlen gebildet wird, die zu der Curve (s') gehören, und der Ort aller Durchschnitte der durch (s') gehenden Strahlen ist die Wendungscurve (σ') der developpablen Fläche (S').

III. Die Aufeinanderfolge aller Wendungscurven (σ) der ersten Reihe der developpablen Flächen (S) wird dann eine andere Fläche (Σ) bilden, zu welcher jeder der reflectirten Strahlen (A) eine Tangente ist. Eben so

wird die Folge der Wendungscurven (σ') der zweyten Reihe der developpablen Flächen (S') eine Fläche (Σ') bilden, zu welcher jeder der reflectirten Strahlen (A) ebenfalls eine Tangente ist. Wir wollen diese beyden Flächen (Σ), (Σ') *caustische Flächen* nennen.

4. §. Eine Ebene, welche durch den reflectirten Strahl (A) und durch die Tangente (D) geht, wird die Gleichung haben

$$(nO - oN)(x - x') + (oM - mO)(y - y')$$
$$+ (mN - nM)(z - z') = o \; \ldots\ldots \; (A, D),$$

und eben so wird die Gleichung der Ebene, die durch die Linien (A) und (D') geht, seyn,

$$(nO' - oN')(x - x') + (oM' - mO')(y - y')$$
$$+ (mN' - nM')(z - z') = o \; \ldots\ldots \; (A, D'),$$

und diese beyden Ebenen enthalten offenbar diejenigen Linien (A), von denen je zwey nächste sich schneiden.

Um daher die Coordinaten xyz des Durchschnittspunctes der Linie (A) zu erhalten, die sich in der Ebene (A, D) befindet, wird man in den Gleichungen (B) für $\frac{dx'}{dz'}$, $\frac{dy'}{dz'}$ ihre Werthe $\frac{M}{O}$, $\frac{N}{O}$ aus den Gleichungen (s) der Reflexionscurve substituiren, und nach dieser Substitution die Gleichungen (A) und (B) combiniren, wodurch man mit Rücksicht auf die Gleichungen (C) erhält,

$$\left.\begin{array}{l} x - x' = m\Delta \\ y - y' = n\Delta \\ z - z' = o\Delta \end{array}\right\} \ldots\ldots (G),$$

wenn der Kürze wegen gesetzt wird $\Delta =$

$$\frac{nM - mN}{m\left[\left(\frac{dn}{dx'}\right)M + \left(\frac{dn}{dy'}\right)N + \left(\frac{dn}{dz'}\right)O\right] - n\left[\left(\frac{dm}{dx'}\right)M + \left(\frac{dm}{dy'}\right)N + \left(\frac{dm}{dz'}\right)O\right]}$$

Für die Entfernung R dieses Punctes xyz von dem Puncte x'y'z' der Fläche (F) endlich hat man

$$R^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 = (m^2 + n^2 + o^2) \cdot \Delta^2.$$

Ähnliche Resultate wird man auch für die Linie erhalten, die sich in der Ebene (A . D′) befindet, wenn man in den vorigen Ausdrücken statt Δ M N O die Grössen Δ' M′ N′ O′ setzt, wodurch man findet

$$\left.\begin{array}{l} x - x' = m \Delta' \\ y - y' = n \Delta' \\ z - z' = o \Delta' \end{array}\right\} \ldots . (G').$$

und $R'^2 = (m^2 + n^2 + o^2) \cdot \Delta'^2$.

I. Es seyen nun (s s) die zwey Integrale der Gleichungen (s), deren Constanten der Integration dadurch bestimmt werden, dass die Reflexionscurve (s) durch einen gegebenen Punct der Fläche (F) geht. Eben so seyen (s′ s′) die zwey Integrale der Gleichungen (s′).

Diess vorausgesetzt, wird die Gleichung der developpablen Fläche (S) das Resultat der Elimination von x′ y′ z′ aus den vier Gleichungen (A) und (s s) seyn.

Die zwey Gleichungen der Wendungscurve (σ) dieser developpablen Fläche aber werden das Resultat der Elimination dieser Grössen x′ y′ z′ aus den fünf Gleichungen (G) und (s s) seyn.

Die Gleichung der caustischen Fläche (Σ) endlich wird das Resultat der Elimination derselben Grössen x′ y′ z′ aus den vier Gleichungen (G) und (F) seyn.

Dieselben Bemerkungen gelten auch für die Gleichungen (S′), (σ') und (Σ'), wenn man in dem vorhergehenden (a), (s′ s′) und (G′) statt (A), (s s) und (G) setzt.

II. Denkt man sich durch den leuchtenden Punct und durch eine der Reflexionscurven (s s) eine conische Fläche (K), so werden alle Strahlen, welche in dieser Fläche enthalten sind, nach der Reflexion sich je zwey schneiden, und so eine der oben betrachteten developpablen Flächen (S) bilden. Eben so werden alle Strahlen, welche in der conischen Fläche (K′), die durch den leuchtenden Punct und durch die Curve (s′ s′) geht, enthalten sind, nach der Reflexion sich je zwey schnei-

den, und eine der developpablen Flächen (S′) bilden. Man kann daher den einfallenden Strahl (a) als den Durchschnitt der zwey Kegelflächen (K), (K′) und den reflectirten Strahl (A) als den Durchschnitt der zwey developpablen Flächen (S), (S′) betrachten.

5 §. Um nun die vorhergehenden allgemeinen Betrachtungen auf einen besonderen Fall anzuwenden, wollen wir annehmen, dass die reflectirende Fläche (F) durch Rotation einer Curve um die Achse der x entstanden ist, und dass der leuchtende Punct in dieser Rotationsachse liege.

Diese Voraussetzung gibt $Y=Z=o$ und $a=x'-X$, $b=y'$, $c=z'$. Die Gleichungen (F) der brechenden Fläche aber werden seyn

$$y'^2+z'^2=\varphi(x'),\quad 2y'dy'+2z'dz'=\varphi'(x').dx',$$

wo $\varphi(x')$ irgend eine Function von x', und wo $\varphi'(x')$ $\frac{d.\varphi(x')}{dx'}$ ist.

Vergleicht man die letzte Gleichung mit der Gleichung (F) des §. 1, so hat man

$$p=\varphi'(x'),\ q=-2y',\ r=-2z'.$$

Substituirt man diese Werthe in den allgemeinen Ausdrücken von m, n, o des §. 1, und setzt

$$\lambda=\frac{1}{4\varphi(x')-\varphi'^2(x')-4(x'-X)\varphi'(x')},$$

so erhält man

$$m=-\lambda[4\varphi(x')-\varphi'^2(x')](x-X)+4\varphi(x').\varphi'(x')=\psi(x'),$$

und $n=y'$, $o=z'$.

Substituirt man diese Werthe von mno in den Ausdrücken des §. 3, so erhält man

$$\alpha=\beta=\gamma=o,$$

und wenn man der Kürze wegen $\omega=1-\psi'(x')$ setzt,

$$\delta=\omega z',\ \varepsilon=\omega y',\ \zeta=o$$

$$L=2\omega(y'^2+z'^2),\ M=o,\ N=-4\omega z'^2\varphi'(x')\ !$$

$$O=O'=4\omega y'z'\varphi'(x'),\ M'=8\omega y'\varphi(x'),\ N'=4\omega y'^2\varphi'(x').$$

Diess vorausgesetzt, erhält man für die Gleichungen der beyden Reflexionscurven (§. 3)

$$\left.\begin{array}{l} dx' = o \\ y'dy' + z'dz' = o \end{array}\right\} \ldots (s) \text{ und}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2\varphi(x').dz' - z'\varphi'(x').dx' = o \\ y'dz' - z'dy' = o \end{array}\right\} \ldots (s').$$

Integrirt man diese Ausdrücke, so ist

$$\left.\begin{array}{l} x' = A \\ y'^2 + z'^2 = \varphi(A) \end{array}\right\} .. (ss) \text{ und } \left.\begin{array}{r} z'^2(1 + B^2) = \varphi(x') \\ y' = Bz' \end{array}\right\} .. (s's'),$$

wo A, B die beyden Constanten der Integration sind.

Die ersten Reflexionscurven (s s) gehören also für eine Folge von *Kreisen*, deren Ebenen alle senkrecht auf der Rotationsachse sind, oder sie gehören für die *Parallelkreise* der Rotationsfläche, und die zweyten Curven (s' s') gehören für die *Meridiane* der Rotationsfläche, weil die Ebenen dieser Curven (s' s') alle durch die Rotationsachse gehen.

I. Eliminirt man die Grössen x'y'z' aus den beyden Gleichungen der Curve (ss) und aus den Gleichungen (a)

$$(x' - X)z = (x - X)z'$$
$$(x' - X)y = (x - X)y'$$
$$yz' - y'z = o,$$

so erhält man die Gleichung

$$(A - X)^2(y^2 + z^2) = (x - X)^2.\varphi(A) \ldots\ldots (K),$$

welche für die §. 4. II. betrachteten Kegel (K) gehört, deren Achse zugleich die Rotationsachse, deren Basis Kreise, und deren Scheitel in dem Puncte $x = X$, $y = o$, $z = o$ sind.

II. Eliminirt man aber x' y' z' aus denselben Gleichungen (a) und jenen der Curve (s's'), so erhält man

$$y = Bz \ldots. (K'),$$

welche Gleichung für die a. a. O. betrachteten Kegel (K') gehört, und welche Kegel für unsern besondern Fall in eine Reihe von Ebenen übergehen, in denen allen die Rotationsachse liegt.

III. Eliminirt man $x'y'z'$ aus den Gleichungen (ss), und aus den Gleichungen (A) des reflectirten Strahles

$$(z-z')\psi(x') = (x-x')z'$$
$$(y-y')\psi(x') = (x-x')y'$$
$$yz'-y'z = o,$$

so erhält man

$$(y^2+z^2).\psi^2(A) = \varphi(A).[x-A+\psi(A)]^2 \ldots. (SS),$$

welche Gleichung nach §. 4. I. für die auf einander folgenden developpablen Flächen (SS) gehört. Diese Flächen bestehen aus einer Folge von Kegeln mit kreisförmiger Basis, deren Achse zugleich die Rotationsachse der Fläche (F) ist, und deren Scheitel mit jedem besondern Werthe der willkührlichen Constante A variirt.

IV. Eliminirt man endlich aus denselben Gleichungen (A) und aus den Gleichungen der Curve (s′s′) die Grössen $x'y'z'$, so erhält man

$$y = Bz \ldots.. (S'S')$$

für die Reihe der developpablen Flächen (S′S′), die also aus einer Folge von Ebenen bestehen, welche Ebenen alle durch die Rotationsachse gehen.

V. Um die Wendungscurven jener developpablen Flächen, und die caustischen Flächen selbst zu bestimmen, wird man zuerst die gefundenen Werthe von MNO und M′N′O′ in den Gleichungen (G) und (G′) des §. 4 substituiren, wodurch man erhält

$$\Delta = -1 \text{ und } \Delta' = -\frac{\psi'(x').\varphi'(x')-2\varphi(x')}{\psi(x').\varphi'(x')-2\varphi(x').\psi'(x')}$$

$$x-x' = -\psi(x'),\ y-y' = -y',\ z-z' = -z' \ldots.(G)$$

$$\text{und } R = -\sqrt{\psi^2(x')+\varphi(x')}.$$

Eben so findet man

$$x-x' = \Delta'.\psi(x'),\ y-y' = \Delta'.y',\ z-z' = \Delta'.z' \ldots. (G')$$

und

$$R' = \Delta'.\sqrt{\psi^2(x')+\varphi(x')}.$$

Eliminirt man also $x'y'z'$ aus den Gleichungen (ss)

und (G), so erhält man, nach §. 4. I. die Gleichungen $(\sigma\,\sigma)$ der Wendungscurven der developpablen Flächen (S), und diese sind

$$x = A - \psi(A),\ y = o,\ z = o \ldots. (\sigma\,\sigma),$$

also reducirt sich jede dieser Wendungscurven auf einen einzigen Punct, der in der Rotationsachse liegt.

VI. Eliminirt man $x' y' z'$ aus den Gleichungen (G) und aus der Gleichung $y'^2 + z'^2 = \varphi(x')$, so erhält man n. a. O. die Gleichung der caustischen Fläche (Σ), welche der Ort aller Wendungscurven (σ) ist, oder welche der Ort aller Durchschnittspuncte der sich schneidenden reflectirten Strahlen ist. Diese Gleichung ist

$$y = o \quad z = o \ldots. (\Sigma),$$

oder die caustische Fläche reducirt sich für unsern Fall auf die Rotationsachse.

VII. Eben so, eliminirt man $x' y' z'$ aus den Gleichungen (G′) und (s′ s′), so erhält man die Gleichungen der Wendungscurven $(\sigma'\,\sigma')$ der developpablen Flächen (S′). Eliminirt man nähmlich jene drey Coordinaten aus der letzten der Gleichungen (s′ s′), und aus den zwey letzten der Gleichungen (G′), so erhält man $y = Bz$ für die eine Projection der gesuchten Curve $(\sigma'\,\sigma')$. Um noch die andere Projection zu erhalten, eliminirt man z' aus der ersten der Gleichungen (s′ s′) und der letzten der Gleichungen (G′), wodurch man findet

$$(1 + B^2) . z^2 = 4\varphi^3 (x') . \left[\frac{1 - \psi'(x')}{\psi(x') . \varphi'(x') - 2\varphi(x') . \psi'(x')}\right]^2 .$$

Da man aber durch die erste der Gleichungen (G′) die Grösse x' durch x bestimmen kann, so reducirt sich die letzte Gleichung auf die Form

$$(1 + B^2) . z^2 = F(x),$$

wo $F(x)$ irgend eine Function von x bezeichnet. Man hat daher

$$y = Bz,\ (1 + B^2)\, z^2 = F(x) \ldots\ldots (\sigma'\,\sigma').$$

VIII. Eliminirt man endlich x' y' z' aus den Glei-

chungen (G′) und der Gleichung $y'^2 + z'^2 = \varphi(x')$, oder, eliminirt man die Constante B aus den beyden Gleichungen $(\sigma' \sigma)$, so erhält man die Gleichung der caustischen Fläche

$$y^2 + z^2 = F.(x) \ldots\ldots (\Sigma'),$$

welche also wieder eine Rotationsfläche ist.

IX. Zum Schlusse dieser Auflösung wollen wir noch die Rotationsfläche bestimmen, bey welcher alle reflectirten Strahlen der Rotationsachse parallel sind. Diese Bedingung ist in folgenden beyden Gleichungen enthalten

$$\frac{n}{m} = \text{Null}, \quad \frac{o}{m} = \text{Null}, \text{ oder}$$

$$4\varphi(x') - \varphi'^2(x') - 4(x' - X).\varphi'(x') = o.$$

Substituirt man in dieser Gleichung für $\varphi(x')$ und $\varphi'(x')$ ihre Werthe $y'^2 + z'^2$ und $\frac{2y'dy' + 2z'dz'}{dx'}$, so erhält man

$$(y'^2 + z'^2)dx'^2 - (y'dy' + z'dz')^2 - 2(x - X)(y'dy' + z'dz')dx' = o,$$

deren Integral

$$4(x' + D)(X + D) = y^2 + z^2$$

für die Paraboloiden gehört, deren Brennpunct in dem Puncte $x = X$, $y = o$, $z = o$ liegt, und für die D irgend eine willkührliche Constante bezeichnet.

6. §. Um auch noch einige einzelne Fälle der Rotationsflächen kurz zu betrachten, wollen wir zuerst annehmen, dass die reflectirende Fläche (F) eine Ebene (ein ebener Spiegel) sey, dessen Lage senkrecht auf die Achse der x seyn soll.

Diess vorausgesetzt, werden die beyden Gleichungen (F) seyn,

$$x' = o \quad \text{und} \quad dx' = o,$$

woraus folgt

$$m = \psi(x') = X, \; n = y', \; o = z'$$

$$\left.\begin{matrix} dx' = o \\ y'dy' + z'dz' = o \end{matrix}\right\} \ldots (s) \quad \left.\begin{matrix} dx' = o \\ y'dz' - z'dy' = o \end{matrix}\right\} \ldots (s'),$$

und ihre Integrale

$$\left.\begin{array}{l} x' = o \\ y'^2 + z'^2 = D^2 \end{array}\right\} \ldots (s\,s), \qquad \left.\begin{array}{l} x' = o \\ y' = B\,z' \end{array}\right\} \ldots (s'\,s').$$

Die Reflexionscurven (s s) sind also eine Folge von Kreisen, und die Curven (s′ s′) eine Folge von geraden Linien, welche alle durch die Achse der x gehen.

Ferner hat man

$$X^2 (y^2 + z^2) = (x - X)^2 . D^2 \ldots\ldots (K) \text{ und}$$
$$y = B\,z \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (K')$$

für die §. 4. II betrachteten Kegel, und eben so

$$X^2 (y^2 + B\,z) = (x + X) . D^2 \ldots\ldots (S\,S)$$
$$y = B\,z \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (S'\,S')$$

für die eben dort angeführten developpablen Flächen. Diese developpablen Flächen (S S), welche von den reflectirten Strahlen gebildet werden, sind daher eine Reihe von Kegeln, welche den Kegeln (K) ähnlich sind, und deren Scheitel in dem Puncte $x = -X$, $y = o$, $z = o$ liegen.

Weiter ist $\Delta = \Delta' = -1$, und

$$R = R' = -\sqrt{X^2 + y'^2 + z'^2},$$

also auch

$$\left.\begin{array}{l} x = -X \\ y = o \\ z = o \end{array}\right\} \ldots (\sigma\,\sigma), (\sigma'\,\sigma'), (\Sigma), (\Sigma'),$$

oder die beyden Reihen von Wendungscurven, so wie die beyden caustischen Flächen reduciren sich auf einen einzigen Punct der Achse der x. Da aber die caustische Fläche, als der Ort der Durchschnitte aller reflectirten Strahlen, das *Bild* des leuchtenden Punctes enthält, so folgt aus den vorhergehenden Gleichungen, dass das Bild des leuchtenden Punctes, so wie der leuchtende Punct selbst, in der Achse der x, und zwar eben so weit hinter dem ebenen Spiegel liegt, als der leuchtende Punct vor dem Spiegel steht, wie bekannt.

7. §. Es sey endlich die Rotationsfläche (F) eine Kugel des Halbmessers ϱ, deren Mittelpunct im Anfange der Coordinaten liegt. Unter dieser Voraussetzung ist die Gleichung (F) des Spiegels

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = \varrho^2,$$

also auch $\varphi(x') = \varrho^2 - x'^2$ und $\varphi'(x') = -2x'$.

Substituirt man diese Werthe in §. 5., so erhält man

$$m = \frac{(\varrho^2 - 2x'X)x' + \varrho^2 X}{\varrho^2 - 2x'X}, \quad n = y', \quad o = z'.$$

Die zwey Folgen der Reflexionscurven sind daher

$$\left.\begin{aligned} x' &= A \\ y'^2 + z'^2 &= \varrho^2 - A^2 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (s\,s) \text{ und}$$

$$\left.\begin{aligned} z'^2(1 + B^2) &= \varrho^2 - x'^2 \\ y' &= B z' \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (s'\,s').$$

Die ersten (s s) gehören für eine Reihe von Kreisen, deren Ebenen jener der yz parallel sind, und die zweyten (s's') zu einer Reihe von grössten Kreisen der Kugel, deren Ebenen sämmtlich durch die Achse der x gehen, und deren Projectionen in den coordinirten Ebenen der xz und xy Ellipsen sind, welche alle dieselbe grösste Achse ϱ haben.

Die §. 4. II. betrachtete Folge von Kegeln hat die Gleichung

$$(A - X)^2 (y^2 + z^2) = (x - X)^2 . (\varrho^2 - A^2) \ldots (K)$$

$$y = Bz \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (K').$$

Die erste Gleichung gehört für Kegel von kreisförmiger Basis, und die zweyte für Ebenen, welche durch die Achse der x gehen.

Die developpablen Flächen, welche durch die einander schneidenden reflectirten Strahlen entstehen, sind

$$[(\varrho^2 - 2AX)A + \varrho^2 X]^2 (y^2 + z^2) = (\varrho^2 - A^2).[(\varrho^2 - 2AX)x + \varrho^2 X]^2 \ldots (SS)$$

$$y = Bz \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (S'S')$$

Die erste Gleichung gehört für eine Reihe von Kegeln, deren Scheitel in der Achse der x liegen. Eben so findet man

$$x = -\frac{\rho^2 X}{\rho^2 - 2AX}, \; y = o, \; z = o \ldots (\sigma\sigma)$$

für die Wendungscurven der developpablen Flächen (SS), die sich also alle auf blosse Puncte in der Achse der x reduciren, und

$$y = o, \; z = o \ldots . (\Sigma)$$

für die caustische Fläche, die also hier die Achse der x ist.

Man bemerkt leicht, dass diese Gleichungen ($\sigma\sigma$) zugleich die Gleichungen (G) sind, wenn man in ihnen statt A die Grösse x′ setzt. Es ist nähmlich

$$\Delta = -1 \text{ und } \Delta' = -\frac{(\rho^2 - 2x'X)(\rho^2 - x'X)}{\rho^2(\rho^2 + 2X^2 - 3x'X)}.$$

Daher sind auch die Gleichungen (G′) des §. 4.

$$\left.\begin{aligned} x &= -X(\rho^2 - x'^2).E \\ y &= 2y'X^2(\rho^4 + 2x'^3X - 3\rho^2 x'X).E \\ z &= 2z'X^2(\rho^2 - x'^2).E \end{aligned}\right\} \ldots . (G')$$

wo $E = \frac{1}{\rho^2(\rho^2 + 2X^2 - 3x'X)}$.

Eliminirt man die Grössen x′ y′ z′ aus den Gleichungen (G′) und (s′ s′), so erhält man die Gleichungen der Wendungscurven ($\sigma'\sigma'$), und eliminirt man dieselben Grössen aus den Gleichungen (G′) und aus jener der Kugel $x'^2 + y'^2 + z'^2 = \rho^2$, so erhält man die Gleichung der caustischen Fläche (Σ'). Aber ohne diese Elimination selbst vorzunehmen, kann man bloss die erzeugenden Kreise dieser Fläche (Σ') betrachten, welche Kreise durch die nächstfolgenden Durchschnitte der developpablen Flächen (S S) gebildet werden. Die Gleichungen dieser erzeugenden Kreise sind,

$$\left.\begin{aligned} x &= -\frac{X(\rho^4 + 2A^3X - 3\rho^2 AX)}{\rho^2(\rho^2 + 2X^2 - 3AX)} \\ y^2 + z^2 &= \frac{4X^4(\rho^2 - A^2)^3}{\rho^4(\rho^2 + 2X^2 - 3AX)^2} \end{aligned}\right\} (I),$$

und man erhält diese Gleichungen (I) durch die Elimination von x′ y′ z′ aus den Gleichungen (s s) und (G′).

Eliminirt man endlich aus diesen Gleichungen (I) die constante Grösse A, so ist das Resultat der Elimination die Gleichung der gesuchten caustischen Fläche (Σ').

I. Für den besondern Fall, wenn die einfallenden Strahlen parallel sind, hat man $X = \infty$, also wenn man für die Constante A ihren Werth x′ setzt,

$$(\varrho^2 - 2x'^2)^2 . (y^2 + z^2) = (\varrho^2 - x'^2) . (\varrho^2 - 2x'x) \dots . (SS),$$

und eben so

$$x = \frac{\rho^2}{2x'}, \; y = o, \; z = o \dots (\sigma\sigma),$$

so wie

$$x = \frac{x'(3\rho^2 - 2x'^2)}{2\rho^2}, \; y^2 + z^2 = \frac{\rho^2 - x'^2}{\rho^4} \dots . (I),$$

und wenn man aus den beyden letzten Gleichungen die willkührliche Constante x′ eliminirt,

$$2x = [1 + 2\varrho^{-\frac{2}{3}}(y^2 + z^2)] . \sqrt{\varrho^2 - \varrho^{\frac{}{3}}(y^2 + z^2)^{\frac{1}{3}}} \dots . (\Sigma').$$

8. §. Das Vorhergehende enthält die Grundzüge der Catoptrik, und mit geringen Veränderungen auch die der Dioptrik. — Trifft nähmlich der einfallende Strahl (a) in dem Puncte x′ y′ z′ eine diaphane Fläche (F), und ist (A) der durch diese Fläche *gebrochene* Strahl, so bilden bekanntlich die beyden Linien (a) und (A) mit der Normale der Fläche (F) in dem Einfallspuncte Winkel, deren Sinus ein constantes Verhältniss haben, welches Verhältniss wir durch h bezeichnen wollen. Diese Bedingung wird analytisch durch folgende Gleichung ausgedrückt

$$\frac{(cq - br)^2 + (ar - cp)^2 + (bp - aq)^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$= h^2 . \frac{(oq - nr)^2 + (mr - op)^2 + (np - mq)^2}{m^2 + n^2 + o^2} \dots (b).$$

Da überdiess die beyden Strahlen (a), (A) und die Normale in einer einzigen Ebene liegen, so ist

$$m(cq - br) + n(ar - cp) + o(bp - aq) = o \dots (c).$$

Diese beyden Gleichungen (b), (c) bestimmen, so wie in §. 1, die Werthe von $\frac{m}{o}$ und $\frac{n}{o}$. Setzt man nähmlich der Kürze wegen

$$P^2 = a^2 + b^2 + c^2$$
$$Q^2 = p^2 + q^2 + r^2$$
$$R = ap + bq + cr,$$

so erhält man

$$\frac{m}{o} = \frac{prh^2P^2 + (cq - br)(bp - aq) \pm (ar - cp) \cdot [P^2Q^2(h^2 - 1) + R^2]^{\frac{1}{2}}}{r^2h^2P^2 - (cq - br)^2 - (ar - cp)^2}$$

$$\frac{n}{o} = \frac{qrh^2P^2 + (ar - cp)(bp - aq) \pm (br - cq)[P^2Q^2(h^2 - 1) + R^2]^{\frac{1}{2}}}{r^2h^2P^2 - (cq - br)^2 - (ar - cp)^2},$$

wo das obere Zeichen für den gebrochenen Strahl, und das untere für eine gerade Linie gehört, die mit der Normale denselben Winkel, wie der gebrochene Strahl, aber auf der entgegen gesetzten Seite der Normale bildet.

Setzt man die Brechung des Strahls gleich Null voraus, so ist $h = 1$, und dann sind die vorhergehenden Werthe von $\frac{m}{o}$ und $\frac{n}{o}$, wenn man die unteren Zeichen nimmt, identisch mit jenen, welche wir in §. 1 für den reflectirten Strahl erhalten haben. Man wird daher auch hier das System der gebrochenen Strahlen (A) als den Ort der Durchschnitte zweyer Systeme von developpablen Flächen (S) und (S′) betrachten können, welche die brechende Fläche (F) nach den zwey Systemen der Curven (s s), (s′ s′) schneiden, und die Durchschnittspuncte je zwey nächstfolgender gebrochener Strahlen werden zwey caustische Flächen (Σ), (Σ′) bilden u. f., welche Curven und Flächen sich durch ein mit dem oben für die Catoptrik gegebenen analogen Verfahren für alle besonderen Fälle bestimmen lassen werden.

9. §. Zum Schlusse dieses interessanten Gegenstandes wollen wir noch folgende Aufgabe auflösen.

Seyen die Coordinaten XYZ des leuchtenden Punctes, und die Coordinaten $X'Y'Z'$ des Punctes gegeben, in welchem das Auge des Beobachters steht. Man suche die Coordinaten $x'\ y'\ z'$ des Punctes eines Spiegels von irgend einer Gestalt, in welchem die Reflexion Statt hat.

Da die Coordinaten $X'\ Y'\ Z'$ auch für den reflectirten Strahl gehören, so hat man

$$m(Z'-z') = o(X'-x')$$
$$n(Z'-z') = o(Y'-y').$$

Aus diesen Gleichungen, und jener $F(x'y'z') = o$ des Spiegels wird man $x'y'z'$ in Functionen von XYZ und $X'Y'Z'$ bestimmen, und so auf dem Spiegel den gesuchten Punct erhalten, wo der Strahl, der das Auge in dem gegebenen Orte $X'Y'Z'$ trifft, reflectirt wird.

I. Ist statt dem leuchtenden Puncte XYZ, eine Reihe von leuchtenden Puncten, eine Curve gegeben, deren Gleichungen

$$f(XYZ) = o, \quad \varphi(XYZ) = o \ldots \text{(II)}$$

sind, so wird man aus diesen beyden Gleichungen der Curve, und aus den drey Gleichungen, welche die Werthe von $x'y'z'$ geben, die drey Grössen XYZ eliminiren, und so zwey Gleichungen zwischen $x'y'z'$ erhalten, welche auf der Oberfläche des Spiegels die Form der Curve bestimmen werden, unter welcher die gegebene Curve (II) von dem Auge des Beobachters gesehen wird.

II. Ist endlich statt der Curve (II) eine Fläche

$$\left.\begin{array}{l} \Phi(XYZ) = o \\ \pi dX + \pi' dY + \pi'' dZ = o \end{array}\right\} \ldots \text{(III)}$$

gegeben, so wird man die Curve, welche den scheinbaren Umriss, die Gränze dieser Fläche gibt, bestimmen, wenn man bemerkt, dass ihre tangirende Ebene ist

$$(x-X)\pi + (y-Y)\pi' + (z-Z)\pi'' = o,$$

und dass die Gleichungen jedes einfallenden Strahles sind

$$(x' - X)(z - Z) = (z' - Z)(x - X)$$
$$(z' - Z)(y - Y) = (y' - Y)(z - Z),$$

so dass man, wenn der einfallende Strahl in der tangirenden Ebene liegt, haben wird

$$(x' - X)\pi + (y' - Y)\pi' + (z' - Z)\pi'' = 0.$$

Substituirt man aber in der letzten Gleichung die Werthe von $x'y'z'$ in Functionen von XYZ und $X'Y'Z'$, so erhält man eine neue Gleichung, die mit der gegebenen $\Phi(X\,Y\,Z) = 0$ verbunden, den zwey vorigen Gleichungen (II) gleichgeltend ist, wodurch demnach diese Aufgabe auf die vorhergehende (in I) zurückgeführt wird. Weiter ausgeführt findet man diese Untersuchungen in einem Memoire von Malus (Journal de l'école polytechnique T. VII., und Mémoires présentés à l'institut, Vol. II. Paris, 1811).

Vierzehntes Capitel.

Anwendung des Vorhergehenden auf die Mechanik.

1. §. In jeder Bewegung wird bekanntlich die *Geschwindigkeit* des bewegten Körpers durch das Differential des Raumes in Beziehung auf das der Zeit ausgedrückt, so wie man unter *Kraft* das Differential der Geschwindigkeit in Beziehung auf das der Zeit versteht. Bezeichnet man daher durch t s v p resp. die Zeit, den Raum, die Geschwindigkeit und die Kraft, so hat man

$$v = \frac{ds}{dt} \text{ und } p = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}.$$

Es sey die Lage eines Körpers gegen einen festen Punct durch die drey rechtwinklichten Coordinaten x y z gegeben. Wir wollen annehmen, dass sich der Körper in der Richtung der Achse der x mit der Geschwindigkeit a, in der Richtung der Achse der y mit der Geschwindigkeit b, und in der Richtung der Achse der z mit der Geschwindigkeit c *gleichförmig* bewege, so dass a b c constante Grössen sind. Diess vorausgesetzt, gibt die erste der vorhergehenden Gleichungen für die Bewegung in der Richtung der Achse der x

$$a = \frac{dx}{dt}.$$

Nimmt man an, dass die Bewegung des Körpers im Anfangspuncte der Coordinaten angefangen habe, oder dass x mit t verschwinde, so ist das Integral des letzten Ausdruckes

$$x = at.$$

Eben so erhält man für die Bewegung des Körpers nach den beyden andern Richtungen

$$y = bt$$
$$z = ct.$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen die Grösse t, so hat man

$$ay = bx$$
$$az = cx,$$

welches die Gleichungen der geraden Linie sind, in der sich der Körper bewegt, und es ist klar, dass der Körper während der Zeit t in jener Linie, in seiner Bahn den Raum

$$s = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = t . \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

zurückgelegt haben wird. Diese aus drey geradlinichten gleichförmigen Bewegungen, deren Richtungen gegen einander senkrecht sind, zusammengesetzte Bewegung ist also wieder geradlinicht und gleichförmig, und ihre beständige Geschwindigkeit ist nach der ersten Gleichung

$$\frac{s}{t} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Wir wollen diese Geschwindigkeit $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ der Kürze wegen durch A bezeichnen, und überdiess $\alpha \beta \gamma$ die Winkel nennen, welche die Richtung dieser zusammengesetzten Bewegung mit den Achsen der x y z bildet, so hat man

$$\text{Cos}\,\alpha = \frac{a}{A} \quad \text{oder} \quad a = A\,\text{Cos}\,\alpha$$

$$\text{Cos}\,\beta = \frac{b}{A} \quad \quad b = A\,\text{Cos}\,\beta$$

$$\text{Cos}\,\gamma = \frac{c}{A} \quad \quad c = A\,\text{Cos}\,\gamma.$$

I. Hätte der Körper noch eine zweyte Geschwindigkeit A' nach einer anderen Richtung, die mit den Achsen der x y z resp. die Winkel $\alpha' \ \beta' \ \gamma'$ bildete, so würde man auch diese zweyte Geschwindigkeit, wie die erste, in drey andere, nach denselben Richtungen

der drey Coordinaten, zerlegen, und diese zerlegten Geschwindigkeiten würden die Ausdrücke haben

$$A' \operatorname{Cos} \alpha'$$
$$A' \operatorname{Cos} \beta'$$
$$A' \operatorname{Cos} \gamma',$$

so, dass also der Körper, vermöge beyder Geschwindigkeiten A und A' erhalten würde

eine Geschwindigkeit nach der Richtung der Achse

der x, die gleich ist $A \operatorname{Cos} \alpha + A' \operatorname{Cos} \alpha'$

y $\qquad A \operatorname{Cos} \beta + A' \operatorname{Cos} \beta'$

z $\qquad A \operatorname{Cos} \gamma + A' \operatorname{Cos} \gamma'$,

und diese drey letzten Geschwindigkeiten werden, nach dem Vorhergehenden, einer einzigen Geschwindigkeit A'' gleichgeltend seyn, deren Richtung mit den Achsen x y z die Winkel $\alpha'' \beta'' \gamma''$ macht, so dass man hat

$$\left.\begin{array}{l} A \operatorname{Cos} \alpha + A' \operatorname{Cos} \alpha' = A'' \operatorname{Cos} \alpha'' \\ A \operatorname{Cos} \beta + A' \operatorname{Cos} \beta' = A'' \operatorname{Cos} \beta'' \\ A \operatorname{Cos} \gamma + A' \operatorname{Cos} \gamma' = A'' \operatorname{Cos} \gamma'' \end{array}\right\} \text{(I)}.$$

Da aber A die Diagonale des rechtwinklichten Parallelepipedums ist, dessen Seiten a b c sind, so hat man $a^2 + b^2 + c^2 = A^2$ oder $\operatorname{Cos}^2 \alpha + \operatorname{Cos}^2 \beta + \operatorname{Cos}^2 \gamma = 1$, und eben so für die übrigen. Erhebt man daher die Gleichungen (I) auf's Quadrat, und addirt sie, so erhält man

$$A''^2 = A^2 + A'^2 + 2AA' (\operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Cos}\alpha' + \operatorname{Cos}\beta \operatorname{Cos}\beta' + \operatorname{Cos}\gamma \operatorname{Cos}\gamma') \ldots \text{(II)}.$$

Aber es ist aus Cap. I. bekannt, wenn M der Winkel der beyden Linien A und A' ist, dass man hat

$$\operatorname{Cos} M = \frac{aa' + bb' + cc'}{AA'},$$

welche Gleichung man auch so ausdrücken kann

$$\operatorname{Cos} M = \operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Cos} \alpha' + \operatorname{Cos} \beta \operatorname{Cos} \beta' + \operatorname{Cos} \gamma \operatorname{Cos} \gamma'.$$

Also geht die Gleichung (II) in folgende über

$$A''^2 = A^2 + A'^2 + 2AA' \operatorname{Cos} M,$$

und aus diesem Ausdrucke folgt sofort, dass die drey

Geschwindigkeiten A A' A'', oder die drey geraden Linien, durch welche jene Geschwindigkeiten vorgestellt werden können, unter einander ein *Dreyeck* bilden, oder dass A'' die Diagonale des Parallelogramms ist, dessen Seiten A und A' sind.

Also lässt sich bey jeder gleichförmigen geradlinichten Bewegung die Geschwindigkeit in drey andere auflösen, welche durch die Seitenlinien eines rechtwinklichten Parallelepipedums vorgestellt werden könne, von dem die zusammengesetzte Kraft die Diagonale ist.

Da man aber jede krumme Linie als ein Polygon von unendlich vielen, und unendlich kleinen geradlinichten Seiten ansehen kann, so lässt sich auch die *augenblickliche* Geschwindigkeit *jeder Bewegung überhaupt* in drey andere unter einander senkrechte Bewegungen auflösen, von denen dasselbe gilt, was wir zuvor für die einfachen Geschwindigkeiten der gleichförmigen Bewegung gefunden haben. Da endlich, nach der zweyten der oben angeführten Gleichungen, die augenblicklichen Geschwindigkeiten d v den Kräften, welche in diesem Augenblicke wirken, proportionirt sind, so wird sich auch jede Kraft in drey andere auflösen lassen, deren Richtungen unter einander senkrecht sind.

Von irgend einem Puncte der Richtung einer Kraft S, welchen Punct wir für den Anfangspunct dieser Kraft annehmen wollen, ziehe man auf dem von ihr zu bewegenden Punct eine gerade Linie s. Die Coordinaten des bewegten Punctes seyen x y z, und die des Anfangspunctes der Kraft a b c, so hat man (Cap. I.)

$$s^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2.$$

Sind aber $\alpha\beta\gamma$ die Winkel, welche die Richtung der Kraft, für welche wir die Linie s annehmen, mit den Achsen der x y z bildet, so sind die drey nach der Richtung dieser Achsen wirkenden Kräfte (§. 1.)

$$S \,.\, \mathrm{Cos}\,\alpha \;=\; S.\frac{x-a}{s} \;=\; S.\left(\frac{\delta s}{\delta x}\right)$$

$$S \,.\, \mathrm{Cos}\,\beta \;=\; S.\frac{y-b}{s} \;=\; S.\left(\frac{\delta s}{\delta y}\right)$$

$$S \,.\, \mathrm{Cos}\,\gamma \;=\; S.\frac{z-c}{s} \;=\; S.\left(\frac{\delta s}{\delta z}\right),$$

wo $\left(\frac{\delta s}{\delta x}\right)$, $\left(\frac{\delta s}{\delta y}\right)$, $\left(\frac{\delta s}{\delta z}\right)$ die partiellen Differentialien des oben gegebenen Ausdruckes von s in Beziehung auf x, y und z sind.

Bezeichnet man ferner für denselben Punct durch $S' s'$ ähnliche Dinge für eine zweyte Kraft, so sind wieder die daraus entstehenden Seitenkräfte

$$S'.\left(\frac{\delta s'}{\delta x}\right)$$

$$S'.\left(\frac{\delta s'}{\delta y}\right)$$

$$S'.\left(\frac{\delta s'}{\delta z}\right),$$

und so fort für jede folgende Kraft $S'' S''' \ldots$

Es sey die Summe aller Seitenkräfte, die parallel mit der Achse der x zerlegt sind, gleich

$$\Sigma . S\left(\frac{\delta s}{\delta x}\right) = S\left(\frac{\delta s}{\delta x}\right) + S'\left(\frac{\delta s'}{\delta x}\right) + S''\left(\frac{\delta s''}{\delta x}\right) + \ldots$$

Ferner sey U die zusammengesetzte aller Kräfte $S, S', S''\ldots$ und u die Entfernung des bewegten Punctes von dem Anfangspuncte der zusammengesetzten Kraft U, so ist, analog mit den Vorhergehenden,

$$U.\left(\frac{\delta u}{\delta x}\right)$$

die Summe aller mit x parallelen Seitenkräfte, also hat man, wenn man beyde Ausdrücke einander gleich setzt,

$$U.\left(\frac{\delta u}{\delta x}\right) = \Sigma . S\left(\frac{\delta s}{\delta x}\right),$$

und eben so

$$U \cdot \left(\frac{\delta u}{\delta y}\right) = \Sigma \cdot S \left(\frac{\delta s}{\delta y}\right)$$

$$U \cdot \left(\frac{\delta u}{\delta z}\right) = \Sigma \cdot S \left(\frac{\delta s}{\delta z}\right).$$

Multiplicirt man diese drey Gleichungen nach der Ordnung durch δx, δu, δz, und addirt die Producte, so erhält man

$$U \cdot \delta u = \Sigma \cdot S \delta s \ldots\ldots (III),$$

und diese Gleichung ist den drey letzten vorhergehenden gleichgeltend.

I. Ist also der Punct, auf welchen die Kräfte S S' S''.. wirken, im Gleichgewichte, d. h. wird er von diesen Kräften nicht in Bewegung gesetzt, so ist die zusammengesetzte Kraft U gleich Null, oder es ist

$$o = \Sigma \cdot S \delta s \ldots\ldots (IV),$$

das heisst, die Summe der Producte jeder Kraft in das Element ihrer Richtung oder die Summe der Kräfte, welche den Punct zu bewegen streben, jede in den Raum multiplicirt, welchen der Punct, an welchem die Kraft angebracht ist, nach der Richtung dieser Kraft zu durchlaufen sich bestrebt, ist für das Gleichgewicht gleich Null.

II. Wirkt also in einem Systeme von Körpern auf einen Punct desselben die Kraft P in der Richtung der geraden Linie p, und auf einen anderen die Kraft Q in der Richtung der geraden Linie q, und auf einen dritten die Kraft R in der Richtung der geraden Linie r, u. s. w., so hat man für das Gleichgewicht dieses Punctes

$$P \delta p + Q \delta q + R \delta r + \ldots = o \ldots\ldots (V),$$

und die Gleichung (IV) oder (V) enthält die gesammte Statik, oder die Lehre vom Gleichgewichte.

III. Wir wollen den Punct, aus welchem die Kraft P ausgeht, den Mittelpunct dieser Kraft nennen, und durch a b c die drey rechtwinklichten Coordinaten die-

ses Mittelpunctes, so wie durch x y z die den vorigen analogen Coordinaten des Punctes bezeichnen, auf welchen jene Kraft wirkt. Diess vorausgesetzt, ist die Entfernung des Mittelpunctes der Kraft P von dem Puncte, auf welchen sie wirkt, gleich

$$p = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2},$$

also auch, wenn man a b c constant annimmt, d. h., wenn die Kraft P keine innere Kraft des Systemes ist, sondern von einem Puncte ausser dem Systeme kömmt,

$$\delta p = \left(\frac{x-a}{p}\right)\delta x + \left(\frac{y-b}{p}\right)\delta y + \left(\frac{z-c}{p}\right)\delta z.$$

Auf eine ähnliche Weise wird man auch die Ausdrücke von δq ... in Functionen von $\delta x'$, $\delta y'$ und $\delta z'$ erhalten, so wie die Ausdrücke von δr in $\delta x''$, $\delta y''$, $\delta z''$.... wenn x' y' z' die Coordinaten des zweyten, x'' y'' z'' die des dritten Punctes des Systemes u. f. bezeichnen. Substituirt man dann diese Werthe von δp, δq, δr in der Gleichung (V), so wird man durch diese Gleichung selbst die Werthe der Coordinaten x y z und x' y' z' und x'' y'' z''.... erhalten.

Ist nähmlich das System ganz frey, das heisst, sind die Coordinaten x y z x'... von einander ganz unabhängig, so wird man in der vorhergehenden Gleichung (V) die Factoren von δx, δy, δz, $\delta x'$... jeden für sich gleich Null setzen, wodurch man eben so viel Gleichungen, als Coordinaten erhält, aus welchen man daher diese Coordinaten durch Elimination bestimmen kann.

Ist aber das System nicht frey, sondern gewissen Bedingungen unterworfen; sollen z. B. einige dieser Puncte auf gegebenen Flächen, oder auf gegebenen krummen Linien sich bewegen, so wird man durch die Gleichungen dieser Flächen oder Linien aus der vorhergehenden Gleichung (V) so viele der Differentia-

lien, δx, δy, δz, $\delta x'$... als möglich eliminiren, und die übrigen als von einander unabhängig betrachten, das heisst, die Factoren eines jeden derselben für sich gleich Null setzen, wodurch man wieder eine Anzahl von Gleichungen erhält, die, verbunden mit den vorhergehenden Bedingungsgleichungen, immer hinreichen werden, das Gleichgewicht des Systemes zu bestimmen.

Denselben Zweck wird man noch einfacher dadurch erreichen, dass man die gegebenen Bedingungsgleichungen, jede mit einem unbestimmten Coefficienten multiplicirt, der allgemeinen Gleichung des Gleichgewichtes hinzu setzt, und dann die Veränderungen δx, δy, δz, $\delta x'$... als unter einander unabhängig betrachtet, wodurch man so viel Gleichungen als Coordinaten erhält, die aber durch die Elimination jener unbestimmten Coefficienten auf eine geringere Anzahl, nähmlich auf so viel weniger zurückgeführt werden, als Bedingungsgleichungen vorhanden sind.

IV. Sind also $du = o$, $dw = o$... diese Bedingungsgleichungen, in Functionen der Coordinaten $x\,y\,z\,x'$... ausgedrückt, und sind $\lambda\;\mu$... unbestimmte Coefficienten, so wird die allgemeine Gleichung (V) des Gleichgewichtes in folgende übergehen

$$P\delta p + Q\delta q + R\delta r \ldots + \lambda\delta u + \mu\delta w + \ldots = o,$$

und diese Gleichung gibt für jede Coordinate, z. B. für x eine Gleichung von folgender Form

$$P\left(\frac{\delta p}{\delta x}\right) + Q\left(\frac{\delta q}{\delta x}\right) + \ldots + \lambda\left(\frac{\delta u}{\delta x}\right) + \mu\left(\frac{\delta w}{\delta x}\right) + \ldots = o,$$

und die Anzahl dieser Gleichungen wird der Anzahl aller Coordinaten $x\;y\;z\;x'$.... gleich seyn.

V. Da δp den kleinen Raum bezeichnet, den der Punct, auf welchen die Kraft P wirkt, nach der Richtung dieser Kraft zurück legt, so wird, wenn $\delta p = o$ ist, dieser Punct sich nicht anders, als in einer Rich-

tung bewegen können, die auf die Richtung jener Kraft senkrecht ist, und $\delta p = o$ wird daher die Gleichung einer *Fläche* seyn, auf der die Richtung der Kraft P senkrecht ist.

Setzen wir umgekehrt voraus, dass die Kraft P senkrecht auf eine Fläche wirke, deren Gleichung ist

$$\delta u = o \text{ oder } \left(\frac{\delta u}{\delta x}\right)\delta x + \left(\frac{\delta u}{\delta y}\right)\delta y + \left(\frac{\delta u}{\delta z}\right)\delta z = o.$$

Damit diese Gleichung mit der

$$(x - a)\,\delta x + (y - b)\,\delta y + (z - c)\,\delta z = o,$$

welche aus der Voraussetzung von $\delta p = o$ folgt, zusammen falle, muss man haben

$$x - a = \left(\frac{\delta u}{\delta x}\right),\ (y - b) = \left(\frac{\delta u}{\delta y}\right),\ z - c = \left(\frac{\delta u}{\delta z}\right).$$

Substituirt man diese Ausdrücke in den vorhergehenden Werthen von p und δp (Nro. III.), und setzt man der Kürze wegen

$$N = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\delta u}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta u}{\delta y}\right)^2 + \left(\frac{\delta u}{\delta z}\right)^2}},$$

so erhält man

$$\delta p = N \,.\, \delta u.$$

Wenn daher die Kraft P senkrecht auf die Fläche $d u = o$ wirkt, so ist

$$P \delta p = N P \delta u.$$

Soll daher in der letzten Gleichung des Nro. IV.

$$\delta u = o$$

die Bedingungsgleichung der Bewegung des Punctes seyn, dessen Coordinaten x y z sind, so kann man dem Gliede $\lambda\,\delta u$ dieser Gleichung auch die Form geben

$$\frac{\lambda}{N} \,.\, N \delta u$$

und so ist klar, dass dieses Glied, so wie die vorhergehenden $P\,\delta p$, $Q\,\delta q$... die Wirkung einer Kraft

$$\frac{\lambda}{N}$$

vorstellt, deren Richtung senkrecht auf die Fläche

$$\delta u = o$$

ist, und man sieht, dass diese neue Kraft

$$\frac{\lambda}{N} = \lambda \sqrt{\left(\frac{\delta u}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta u}{\delta y}\right)^2 + \left(\frac{\delta u}{\delta z}\right)^2}$$

eigentlich den Widerstand, oder den *Druck* bezeichnet, welchen der gegebene Punct von der Fläche leidet, auf welcher er sich bewegt. Dasselbe wird auch von den andern Ausdrücken $\mu\,\delta w$... gelten.

3. §. Wir wollen nun eben so die *allgemeine Gleichung der Bewegung* suchen.

Wenn auf einen Punct eine Anzahl gegebener Kräfte nach gegebenen Richtungen wirkt, so lassen sich, nach §. 1., alle diese Kräfte auf drey andere, X, Y, Z, bringen, die in derselben Ordnung mit den rechtwinklichten Coordinaten x y z des Punctes parallel wirken.

Am Ende einer Zeit t wird also, nach der ersten der Gleichungen des §. 1., der Punct nach den Richtungen dieser drey Coordinaten die Geschwindigkeiten

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt}$$

haben, und wenn man am Ende dieser Zeit den Körper sich selbst überliesse, so würde er, nach dem Gesetze der Trägheit, diese Geschwindigkeiten unverändert beybehalten. Da aber am Ende der Zeit t die Kräfte X Y Z wieder auf den Körper wirken, so wird der Körper in dem nächstfolgenden Augenblicke dt die Geschwindigkeiten haben

$$\frac{dx}{dt} + X\,dt, \quad \frac{dy}{dt} + Y\,dt, \quad \frac{dz}{dt} + Z\,dt,$$

oder mit andern Worten, er wird die Geschwindigkeiten haben

$$\frac{dx}{dt} + d.\frac{dx}{dt} - d.\frac{dx}{dt} + X\,dt \quad \text{nach } x$$

$$\frac{dy}{dt} + d.\frac{dy}{dt} - d.\frac{dy}{dt} + Y\,dt \quad \text{nach } y$$

$$\frac{dz}{dt} + d.\frac{dz}{dt} - d.\frac{dz}{dt} + Z\,dt \quad \text{nach } z.$$

Allein in diesem neuen Augenblicke sind offenbar auch die mit den drey Coordinaten parallelen Geschwindigkeiten

$$\frac{dx}{dt} + d.\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} + d.\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} + d.\frac{dz}{dt},$$

woraus folgt, dass die Geschwindigkeiten, oder die Kräfte (§. 1.)

$$\left.\begin{array}{l} -d.\frac{dx}{dt} + X\,dt \\ -d.\frac{dy}{dt} + Y\,dt \\ -d.\frac{dz}{dt} + Z\,dt \end{array}\right\}$$

in diesem neuen Augenblicke *sich aufheben*, und dass daher, wenn bloss diese letzten drey Kräfte auf den Körper wirkten, er vermöge dieser Kräfte im *Gleichgewichte* seyn würde. Die allgemeine Gleichung des Gleichgewichtes (IV. §. 2.) wird also auch zugleich die allgemeine Gleichung der Bewegung seyn, wenn man nur in jener den Kräften X Y Z noch die in entgegengesetzten Richtungen wirkenden Kräfte

$$-\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right), -\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right), -\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)$$

hinzufügt.

Sind daher, wie dort, $du = o$, $dw = o$.... die Gleichungen, durch welche gegebene Nebenbedingungen der Aufgabe ausgedrückt werden, und sind $\lambda . \mu ..$ unbestimmte Grössen, so ist die allgemeine Gleichung der Bewegung

$$o = \left(\frac{d^2 x}{d t^2} - X\right)\delta x + \left(\frac{d^2 y}{d t^2} - Y\right)\delta y + \left(\frac{d^2 z}{d t^2} - Z\right)\delta z$$

$$+ \lambda \delta u + \mu \delta w + \ldots\ldots (VI),$$

und man wird diese Gleichung eben so, wie zuvor die des Gleichgewichtes, behandeln. Soll z. B. der Körper sich auf einer Fläche bewegen, deren Gleichung

$$\delta u = A dx + B dy + C dz = o$$

ist, wo A, B, C Functionen von x y z und constanten Grössen sind, so erhält man für die Bewegung des Körpers die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} o &= \frac{d^2 x}{d t^2} - X - \lambda A \\ o &= \frac{d^2 y}{d t^2} - Y - \lambda B \\ o &= \frac{d^2 z}{d t^2} - Z - \lambda C \end{aligned}\right\}$$

und der Druck des Körpers auf die Fläche wird seyn

$$\lambda \sqrt{\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \left(\frac{du^2}{dz^2}\right)} = \lambda \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Ist aber die Bewegung des Körpers ganz frey, so wird man in den vorhergehenden drey Gleichungen die Grösse λ gleich Null setzen.

I. Soll sich der Körper auf der Fläche

$$\delta u = o$$

bewegen, und keine äussere Kraft auf ihn wirken, so ist

$$X = Y = Z = o,$$

und wenn v die Geschwindigkeit des Körpers in seiner

Bahn, so wie d s das Element des von ihm in der Zeit dt durchlaufenen Bogens bezeichnet, so ist

$$v = \frac{ds}{dt},$$

also gehen die drey vorhergehenden Gleichungen in folgende über

$$o = \frac{v^2 d^2x}{ds^2} + \lambda \left(\frac{du}{dx}\right)$$

$$o = \frac{v^2 d^2y}{ds^2} + \lambda \left(\frac{du}{dy}\right)$$

$$o = \frac{v^2 d^2z}{ds^2} + \lambda \left(\frac{du}{dz}\right),$$

also ist auch

$$N = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \left(\frac{du}{dz}\right)^2}} = \frac{\lambda\, ds^2}{v^2 . \sqrt{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2}},$$

und daher der Druck des Körpers auf die Fläche (§. 2. Nro. V.)

$$\frac{\lambda}{N} = \frac{v^2 . \sqrt{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2}}{ds^2}.$$

Wenn aber, wie hier vorausgesetzt wird, die Grösse ds constant ist, so ist (Capitel III.) der Krümmungshalbmesser einer Curve von doppelter Krümmung

$$R = \frac{ds^2}{\sqrt{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2}},$$

also ist der Druck des Körpers auf die Fläche gleich

$$\frac{v^2}{R}.$$

Wenn also keine äussere Kraft auf den Körper wirkt, der sich auf einer Fläche bewegt, so ist sein Druck gegen diese Fläche gleich dem Quadrate der Geschwindigkeit, dividirt durch den Krümmungshalb-

messer der Curve, welche der Körper auf dieser Fläche beschreibt. Diesem Ausdrucke wird man noch die Kräfte hinzufügen müssen, welche von äusseren Einwirkungen fremder Kräfte auf den Körper in einer auf die Fläche senkrechten Richtung entstehen, um den *ganzen* Druck zu erhalten, welchen der Körper gegen die Fläche ausübt.

4. §. Um das Vorhergehende auf einige Beyspiele anzuwenden, wollen wir zuerst das Gleichgewicht eines Punctes suchen, auf welchen eine Anzahl Kräfte P, Q, R... nach gegebenen Richtungen wirken.

Sind p q r.. die Entfernungen jenes Punctes von den Mittelpuncten dieser Kräfte; x y z die drey senkrechten Coordinaten jenes Punctes; a b c die analogen Coordinaten des Mittelpunctes der Kraft P; a' b' c' die des Mittelpunctes der Kraft Q u. s. w., so ist

$$p^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2$$
$$q^2 = (x - a')^2 + (y - b')^2 + (z - c')^2$$
$$r^2 = (x - a'')^2 + (y - b'')^2 + (z - c'')^2 \text{ u. f.,}$$

und die Gleichung des Gleichgewichtes

$$P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \ldots = 0$$

geht über in

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z \ldots = 0,$$

vorausgesetzt, dass man hat

$$X = \frac{x-a}{p}P + \frac{x-a'}{q}Q + \frac{x-a''}{r}R +$$
$$Y = \frac{y-b}{p}P + \frac{y-b'}{q}Q + \frac{y-b''}{r}R +$$
$$Z = \frac{z-c}{p}P + \frac{z-c'}{q}Q + \frac{z-c''}{r}R +.$$

Ist daher der Punct, auf welchen diese Kräfte wirken, ganz frey, also δx, δy, δz von einander unabhängig, so ist sein Gleichgewicht in folgenden drey Gleichungen enthalten,

$$X = o, \; Y = o, \; Z = o.$$

Ist aber der Punct gezwungen, auf einer Fläche zu bleiben, deren Gleichung $L = o$ ist, so hat man für das Gleichgewicht

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z + \lambda.\delta L = o,$$

das heisst,

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z + \lambda\left[\left(\frac{\delta L}{\delta x}\right)\delta x + \left(\frac{\delta L}{\delta y}\right)\delta y + \left(\frac{\delta L}{\delta z}\right)\delta z\right] = o$$

oder, da in dem letzten Ausdrucke die Grössen δx, δy, δz von einander unabhängig sind,

$$X + \lambda\left(\frac{\delta L}{\delta x}\right) = o$$

$$Y + \lambda\left(\frac{\delta L}{\delta y}\right) = o$$

$$Z + \lambda\left(\frac{\delta L}{\delta z}\right) = o,$$

oder endlich, wenn man λ eliminirt,

$$\left.\begin{array}{l} Y\left(\frac{\delta L}{\delta x}\right) - X\left(\frac{\delta L}{\delta y}\right) = o \\ Z\left(\frac{\delta L}{\delta x}\right) - X\left(\frac{\delta L}{\delta z}\right) = o \end{array}\right\} (1).$$

Ist daher die Fläche gegeben, so sind auch die Grössen

$$\left(\frac{\delta L}{\delta x}\right), \; \left(\frac{\delta L}{\delta y}\right), \; \left(\frac{\delta L}{\delta z}\right)$$

bekannt, und man findet aus den beyden letzten Gleichungen die Verhältnisse der Kräfte $X\,Y\,Z$, die für das Gleichgewicht Statt haben müssen.

Sind aber diese Kräfte und die Fläche gegeben, so hat man drey Gleichungen, die beyden (1) und die Gleichung der Fläche $L = o$, und aus ihnen wird man durch Elimination die Werthe der Coordinaten $x\;y\;z$, für den Punct der Fläche bestimmen, in welchem der gegebene Punct im Gleichgewichte ist.

Endlich ist der Druck, welchen der gegebene Punct senkrecht gegen die Fläche ausübt, nach §. 3.,

$$\lambda \sqrt{\left(\frac{\delta L}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta L}{\delta y}\right)^2 + \left(\frac{\delta L}{\delta z}\right)^2} = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Dieselben Gleichungen (1) würde man erhalten, wenn man der Gleichung

$$X \delta x + Y \delta y + Z \delta z = 0$$

noch die folgende

$$\left(\frac{\delta L}{\delta x}\right) \delta x + \left(\frac{\delta L}{\delta y}\right) \delta y + \left(\frac{\delta L}{\delta z}\right) \delta z = 0$$

hinzufügt, eine der drey Grössen δx, δy, δz eliminirt, und die beyden andern als von einander unabhängig betrachtet.

Ist die Oberfläche eine Kugel, deren Halbmesser r ist, so hat man

$$L = 0 = x^2 + y^2 + z^2 - r^2.$$

Setzt man daher der Kürze wegen

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2,$$

so ist für das Gleichgewicht

$$x = \frac{Xr}{R}, \; y = \frac{Yr}{R}, \; z = \frac{Zr}{R},$$

und der Druck $= R$.

Wäre der Körper gezwungen, in einer krummen Linie sich zu bewegen, deren Gleichungen

$\delta y = p \delta x$ und $\delta z = q \delta x$ sind,

so wird man nur diese Werthe von δy und δz in der Gleichung

$$X \delta x + Y \delta y + Z \delta z = 0$$

substituiren, wodurch man für das Gleichgewicht erhält

$$X + Y p + Z q = 0,$$

welche Gleichung mit den beyden Gleichungen der krummen Linie verbunden, die Werthe von $x y z$ für den Punct der krummen Linie gibt, in welchem der Körper im Gleichgewichte ist.

Setzt man $Y = y = o$, so erhält man die Bedingung des Gleichgewichtes eines Punctes, der auf einer ebenen Curve bleiben soll. Ist $L = o$ die Gleichung dieser ebenen Curve, so ist für das Gleichgewicht

$$X\left(\frac{\delta L}{\delta z}\right) - Z\left(\frac{\delta L}{\delta x}\right) = o \ldots (2),$$

und der Druck des Punctes gegen die Curve ist

$$\sqrt{X^2 + Z^2}.$$

Diese Gleichung gibt auch die Gleichung der Curve, auf welcher der Punct unter gegebenen Kräften im Gleichgewichte ist. Ist z. B. $X = a$ constant, und $Z = z$, so hat man

$$a\left(\frac{dL}{dz}\right) - z\left(\frac{dL}{dx}\right) = o,$$

deren Integral $z^2 = 2ax$ die Gleichung der Parabel ist. In der That ist in der Parabel die Subnormale constant, und der Druck gleich

$$\sqrt{X^2 + Z^2} = \sqrt{a^2 + z^2},$$

oder gleich der Normale.

Soll der Punct sich auf einer Ebene bewegen, die mit der horizontalen Ebene der xy den Winkel n bildet, so ist ihre Gleichung

$$L = o = x \operatorname{tg} n - z.$$

In der Ebene der xz wirken zwey Kräfte auf den Punct, deren eine P mit der Achse der x den Winkel α, und die andere Q mit derselben Achse den Winkel β bildet, so ist

$$X = P \operatorname{Cos} \alpha + Q \operatorname{Cos} \beta$$
$$Z = P \operatorname{Sin} \alpha + Q \operatorname{Sin} \beta,$$

und die Gleichung (2)

$$X + Z \operatorname{tg} n = o, \text{ oder}$$

$$P \operatorname{Cos} \alpha + Q \operatorname{Cos} \beta + (P \operatorname{Sin} \alpha + Q \operatorname{Sin} \beta) \operatorname{tg} n = o.$$

Ist die eine Kraft P die Schwere, und z senkrecht, so ist $\alpha = 90°$ und

$$Q = -P \frac{\text{Sin } n}{\text{Cos } (n-\beta)}$$

der Werth der andern Kraft Q, welche den schweren Körper auf der Ebene festhält. Der Druck des Körpers auf die Ebene ist

$$N = \sqrt{X^2 + Z^2} = \frac{P \text{ Cos } \beta}{\text{Cos } (n-\beta)}$$

und in den beyden letzten Gleichungen ist die ganze Theorie der schiefen Ebene enthalten.

Ist $\beta = 0$, oder zieht die Kraft Q horizontal, so ist

$$Q = -P \text{ tg } n \text{ und } N = \frac{P}{\text{Cos } n}.$$

Ist $\beta = n$, oder zieht die Kraft Q in der Richtung der Ebene selbst, so ist

$$Q = -P \text{ Sin } n$$
$$N = P \text{ Cos } n.$$

Ist $\beta = 90°$, so ist $Q = -P$ und $N = 0$.

Ist $\beta = \frac{n}{2}$, so ist $Q = -2 P \text{ Sin } \frac{n}{2}$ und $N = P$ u. s. w.

5. §. Eben so wollen wir nun auch einige Anwendungen der oben gegebenen allgemeinen Gleichung *der Bewegung* (VI) mittheilen, und unter diesen zuerst kurz die Bewegung in geraden Linien betrachten.

Wenn keine immer thätigen Kräfte, wie wir sie so häufig in der Natur bemerken, sondern nur eine einen Augenblick wirkende Kraft nach der Richtung der x auf einen körperlichen Punct wirkt, so geht die allgemeine Gleichung der Bewegung in folgende sehr einfache über

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = 0,$$

da X, Y, Z, und y, z gleich Null sind.

Das erste Integral dieser Gleichung ist

$$\frac{dx}{dt} = a$$

für die Geschwindigkeit, und das zweyte Integral ist

$$x = at + b$$

für den in der Zeit t zurückgelegten Raum, wenn $x = b$ für den Anfang der Bewegung ist. Da die Geschwindigkeit a constant ist, so ist die Bewegung gleichförmig.

I. Wenn aber auf den Körper eine immer thätige, aber constante Kraft g in der Richtung der x wirkt, so geht die oben gegebene allgemeine Gleichung der Bewegung, wenn diese Bewegung vollkommen frey ist, in folgende über

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g$$

weil $X = g$ und Y, Z, y, z Null sind.

Das erste Integral dieser Gleichung ist

$$\frac{dx}{dt} = gt + a,$$

und das zweyte

$$x = \tfrac{1}{2}gt^2 + at + b,$$

wo a und b die Constanten der Integration sind. Die Grösse a ist die anfängliche Geschwindigkeit, und b ist der im Anfange der Zeit t zurückgelegte Raum. Bewegt sich also der Körper aus der Ruhe, so ist $a = b = 0$, und man hat

für die Geschwindigkeit $v = \frac{dx}{dt} = gt$,

und für den in der Zeit t zurückgelegten Raum

$$x = \tfrac{1}{2}gt^2,$$

woraus noch folgt $v^2 = 2gx$.

Diess sind die bekannten Gleichungen für Körper, die nahe an der Oberfläche der Erde frey fallen. Aus Beobachtungen hat man gefunden, dass für jeden Ort

$$\tfrac{1}{2}g = 15.05105 + 0.07712 \sin^2 \varphi$$

Pariser Fuss ist, wo φ die geographische Breite des Ortes bezeichnet.

Für senkrecht aufwärts geworfene Körper ist g negativ, also $v = a - gt$, und $x = at - \frac{1}{2}gt^2$.

II. In grösseren Entfernungen über der Oberfläche der Erde kann man die Kraft g der Erde nicht mehr als constant annehmen, da sie sich bekanntlich wie verkehrt das Quadrat der Entfernung des Körpers vom Mittelpuncte der Erde verhält. Ist also wie zuvor, g die constante Schwere auf der Oberfläche der Erde, und r der Halbmesser der Erde, so wie a die anfängliche Entfernung des Körpers vom Mittelpuncte der Erde, so hat man für die Kraft der Erde in der Richtung der senkrechten Achse der x den Ausdruck

$$X = \frac{g \cdot r^2}{(a-x)^2},$$

also ist die allgemeine Gleichung der Bewegung

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{g \cdot r^2}{(a-x)^2}.$$

Multiplicirt man diese Gleichung durch $2dx$, so ist ihr Integral, wenn die anfängliche Geschwindigkeit des Körpers Null ist,

$$\frac{dx^2}{dt^2} = \frac{2gr^2}{a} \cdot \frac{x}{a-x},$$

also die Geschwindigkeit des Körpers für jeden Werth von x gleich

$$v = r . \sqrt{\frac{2gx}{a(a-x)}}.$$

Die vorhergehende Gleichung gibt zugleich

$$dt = \frac{dx}{r} \cdot \left(\frac{a}{2g}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{a-x}{\sqrt{ax-x^2}},$$

deren Integral ist, wenn x mit t zugleich verschwindet,

$$t = \frac{1}{r}\left(\frac{a}{2g}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{\sqrt{ax-x^2} + \frac{a}{2} \text{ Arc Cos } \frac{a-2x}{a}\right\},$$

durch welche Gleichung man für jeden Werth von x den ihm entsprechenden Werth von t findet.

Nimmt man in diesen Ausdrücken x sehr klein gegen a, und a sehr nahe gleich r, so gehen sie in folgende über

$$v = \sqrt{2gx}$$

$$t = \sqrt{\frac{2x}{g}}$$

die mit denen in I identisch sind.

6. §. Indem wir nun zu den Bewegungen in krummen Linien übergehen, wollen wir zuerst die Bewegung eines Körpers suchen, auf welchen die constanten Kräfte a b c in der Richtung der Coordinaten x y z wirken.

Wenn diese Bewegung ganz frey, oder keinen äussern Bedingungen unterworfen ist, so hat man nach dem Vorhergehenden

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + a = o \\ \frac{d^2y}{dt^2} + b = o \\ \frac{d^2z}{dt^2} + c = o \end{aligned}\right\}$$

Nennt man α, β, γ die anfänglichen Geschwindigkeiten des Körpers nach den Richtungen der x, y, z, so sind die ersten Integralien der vorhergehenden Gleichungen

$$\frac{dx}{dt} = \alpha - at$$

$$\frac{dy}{dt} = \beta - bt$$

$$\frac{dz}{dt} = \gamma - ct$$

und die zweyten Integralien, wenn man voraussetzt, dass die Coordinaten x, y, z mit der Zeit t zugleich verschwinden,

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha t - \frac{a}{2}.t^2 \\ y &= \beta t - \frac{b}{2}.t^2 \\ z &= \gamma t - \frac{c}{2}.t^2 \end{aligned}\right\}$$

Die drey vorletzten Gleichungen geben die Geschwindigkeiten, und die drey letzten die durchlaufenen Räume des Körpers nach den drey Richtungen der Coordinaten für jede Zeit t.

Eliminirt man aus den drey letzten Gleichungen die Grössen t^2 und t, so erhält man

$$o = (\beta c - b\gamma)\, x - (\alpha c - a\gamma)\, y + (\alpha b - a\beta)\, z$$

die Gleichung einer Ebene. Also ist die Bahn des Körpers selbst eine ebene Curve.

Um die Lage der Ebene der Bahn zu bestimmen, sey n die Neigung dieser Ebene gegen die coordinirte Ebene der x y, und k der Winkel, welchen die Knotenlinie dieser Ebene in der Ebene der x y mit der Achse der x bildet, so ist

$$\text{Cos}\, n = \frac{\alpha b - a\beta}{m} \text{ und tg } k = \frac{\beta c - b\gamma}{\alpha c - a\gamma},$$

wo $m^2 = (\beta c - b\gamma)^2 + (\alpha c - a\gamma)^2 + (\alpha b - a\beta)^2$ ist.

Um auch die Projectionen der Bahn in den drey coordinirten Ebenen zu finden, eliminirt man aus den drey letzten Integralgleichungen die Grösse t, wodurch man für diese Projectionen erhält

$$\left.\begin{aligned} o &= a^2 y^2 + b^2 x^2 - 2\,abxy + 2\,(\alpha b - a\beta)\,(\alpha y - \beta x) \\ o &= a^2 z^2 + c^2 x^2 - 2\,acxz + 2\,(\alpha c - a\gamma)\,(\alpha z - \gamma x) \\ o &= b^2 z^2 + c^2 y^2 - 2\,bcyz + 2\,(\beta c - b\gamma)\,(\beta z - \gamma y) \end{aligned}\right\} (1),$$

und da in diesen Gleichungen die Summe der drey ersten Glieder ein vollkommenes Quadrat ist, so sind alle diese Projectionen Parabeln.

Um die Lage und Grösse dieser Parabeln zu fin-

den, ist bekanntlich die Gleichung der Parabel, deren halber Parameter p ist,

$$y'^2 = 2px',$$

wo die Abscissen x' auf der Achse der Parabel vom Scheitel derselben, und y' darauf senkrecht genommen sind. Es seyen A und B die den x' und y' parallelen Distanzen eines andern willkührlichen Punctes vom Scheitel der Parabel. Durch diesen Punct ziehe man eine gerade Linie, welche mit der Achse der Parabel den Winkel $90 - \varphi$ bildet, und nehme auf dieser Linie die neuen Abscissen x von jenem willkührlichen Puncte, und die neuen Ordinaten y darauf senkrecht. Diess vorausgesetzt, ist

$$x' = y \operatorname{Cos} \varphi + x \operatorname{Sin} \varphi + B$$
$$y' = y \operatorname{Sin} \varphi - x \operatorname{Cos} \varphi + A.$$

Substituirt man diese Werthe von x' und y' in der Gleichung $y'^2 = 2px'$, und vergleicht dann diesen Ausdruck mit der ersten der Gleichungen (1), so hat man, wenn $a^2 + b^2 = r^2$ gesetzt wird,

$$\frac{a^2}{r^2} = \operatorname{Sin}^2 \varphi; \ \frac{b^2}{r^2} = \operatorname{Cos}^2 \varphi; \ \frac{ab}{r^2} = \operatorname{Sin} \varphi \operatorname{Cos} \varphi$$

$$\frac{\alpha(\alpha b - a\beta)}{r^2} = A \operatorname{Sin}\varphi - p \operatorname{Cos}\varphi; \ \frac{\beta(\alpha b - a\beta}{r^2} = A \operatorname{Cos}\varphi + p \operatorname{Sin}\varphi,$$

und $A^2 - 2Bp = 0$.

Aus diesen sechs Bedingungsgleichungen findet man

$$\operatorname{Sin} \varphi = \frac{a}{r}, \ \operatorname{Cos} \varphi = \frac{b}{r},$$

$$A = \frac{(\alpha b - a\beta)(a\alpha + b\beta)}{(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$B = \frac{(a\alpha + b\beta)^2}{2(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}} \text{ und endlich}$$

$$p = \frac{(\alpha b - a\beta)^2}{(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}},$$

und durch die Grössen φ, A, B, p ist die Lage der er-

sten Parabel, so wie ihre Grösse bestimmt. Ganz eben so erhält man für die zweyte, oder die Projection in x z,

$$tg\varphi = \frac{a}{c};\ A = \frac{(\alpha c - a\gamma)(a\alpha + c\gamma)}{(a^2 + c^2)^{\frac{3}{2}}};\ B = \frac{(a\alpha + c\gamma)^2}{2(a^2 + c^2)^{\frac{3}{2}}};\ p = \frac{(\alpha c - a\gamma)^2}{(a^2 + c^2)^{\frac{3}{2}}},$$

und für die Projection in y z

$$tg\varphi = \frac{b}{c};\ A = \frac{(\beta c - b\gamma)(b\beta + c\gamma)}{(b^2 + c^2)^{\frac{3}{2}}};\ B = \frac{(b\beta + c\gamma)^2}{2(b^2 + c^2)^{\frac{3}{2}}};\ p = \frac{(\beta c - b\gamma)^2}{(b^2 + c^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Nachdem so die Lage und Gestalt aller Projectionen bestimmt ist, hat man noch für die Geschwindigkeit v des Körpers in seiner Bahn

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}\right)}$$

$$= \sqrt{(\alpha^2 - 2ax) + (\beta^2 - 2by) + (\gamma^2 - 2cz)}$$

$$= \sqrt{(\alpha - at)^2 + (\beta - bt)^2 + (\gamma - ct)^2}.$$

I. Aus dieser allgemeinen Auflösung wird man leicht auch die von folgenden besonderen Fällen ableiten.

Für $\frac{a}{b} = \frac{\alpha}{\beta}$ ist die Projection der Bahn in x y eine gerade Linie.

Für $\frac{a}{c} = \frac{\alpha}{\gamma}$ ist die Projection in x z eine gerade Linie.

Haben aber beyde Gleichungen zugleich Statt, so ist auch $\frac{b}{c} = \frac{\beta}{\gamma}$, und die Bahn selbst ist eine gerade Linie.

Für $\alpha = \beta = 0$ ist die Projection in x y; und für $\alpha = \gamma = 0$ ist die Projection in x z; und für $\alpha = \beta = \gamma = 0$ ist die Bahn selbst eine gerade Linie.

Für $a = b = 0$ ist die Projection in x y eine gerade Linie.

Für $a = b = \alpha = 0$ liegt die Bahn in der Ebene der y z, für $a = b = \beta = 0$ in der Ebene der x z, und für $a = b = \alpha = \beta = 0$ in der Achse der z.

Der vorletzte Fall $a = b = \beta = 0$ gibt für die Gleichung der Bahn in der Ebene der x z

$$z = \frac{\gamma}{\alpha} x - \frac{c}{2\alpha^2} . x^2 \ldots (2),$$

also auch $x'^2 = \frac{2\alpha^2}{c} . y'$,

$\varphi = o$, $A = \frac{\alpha\gamma}{c}$, $B = \frac{\gamma^2}{2c}$; $p = \frac{\alpha^2}{c}$ der halbe Parameter.

Der letzte Fall endlich $a = b = \alpha = \beta = o$, gibt für die Bewegung in der Achse der z

$$v = \sqrt{\gamma^2 - 2cz} = \gamma - ct \text{ und } z = \gamma t - \frac{c}{2} t^2,$$

welche Ausdrücke mit denen übereinstimmen, die wir (§. 5) für die Bewegung in gerader Linie erhalten haben.

7. §. Da wir im Anfange der vorhergehenden Auflösung gefunden haben, dass die Bahn des Körpers eine ebene Curve sey, so hätten wir die folgenden Untersuchungen dadurch vereinfachen können, wenn wir für die Ebene dieser Bahn sogleich die Ebene der x z angenommen, oder die Grösse y gleich Null gesetzt hätten.

Setzt man also voraus, dass bloss eine constante Kraft g, die Schwere, in der senkrechten Richtung der z auf einen Körper wirke, der in der Richtung der Ebene der x z geworfen wurde, so hat man für die Bewegung dieses Körpers im freyen Raume die Gleichungen

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = o,$$

$$\frac{d^2 z}{d t^2} + g = o,$$

deren Integrale sind

$$x = bt + b'$$

$$z = -\tfrac{1}{2} g t^2 + ct + c',$$

wo b b' und c c' willkührliche Constanten sind.

Setzt man aber den Anfangspunct der Bewegung in den Anfangspunct der Coordinaten, und zählt man auch die Zeit von dem Anfange der Bewegung, so ist $b' = c' = o$.

Es sey a die anfängliche Geschwindigkeit, mit welcher der Körper geworfen wird, und α der Winkel der Richtung dieser Geschwindigkeit mit der Achse der x, so sind die anfänglichen Geschwindigkeiten nach x und z

$$a \operatorname{Cos} \alpha = \frac{dx}{dt} = b \text{ und } a \operatorname{Sin} \alpha = \frac{dz}{dt} = -gt + c,$$

also für t = o

$$b = a \operatorname{Cos} \alpha \text{ und } c = a \operatorname{Sin} \alpha,$$

und die vorhergehenden Werthe von x und z

$$x = at \operatorname{Cos} \alpha$$
$$z = -\tfrac{1}{2} gt^2 + at \operatorname{Sin} \alpha.$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen die Grösse t, so hat man für die Bahn des Körpers

$$z = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2a^2 \operatorname{Cos}^2 \alpha}, \text{ oder}$$

$$z = x \cdot \frac{c}{b} - \frac{gx^2}{2b^2},$$

die Gleichung der Parabel, übereinstimmend mit dem Vorhergehenden.

Die Geschwindigkeit in irgend einem Puncte dieser Parabel ist

$$v = \sqrt{\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}} = \sqrt{a^2 - 2gz}.$$

Die grösste Höhe, über der horizontalen Achse der x, die der Körper erreichen kann, ist

$$\frac{a^2 \operatorname{Sin}^2 \alpha}{2g},$$

und die Entfernung des Anfangspunctes von dem Puncte der Achse der x, wo die Parabel diese Achse zum zweyten Mahle schneidet, oder die Weite des Wurfes, ist

$$\frac{a^2}{g} \cdot \operatorname{Sin} 2\alpha,$$

also diese Weite am grössten für $\alpha = 45°$.

Ist endlich die anfängliche Geschwindigkeit a gegeben, und sucht man den Winkel α, damit der geworfene Körper einen Punct treffe, dessen Coordinaten $x = A$ und $z = B$ sind, so hat man

$$B = A \operatorname{tg} \alpha - \frac{g A^2}{2 a^2 \operatorname{Cos} \alpha^2},$$

$$\text{also } \operatorname{tg} \alpha = \frac{2h \pm \sqrt{4h^2 - 4Bh - A^2}}{A},$$

wenn $h = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{g}$ ist. Der gesuchte Winkel hat daher einen doppelten Werth, und für

$$4Bh + A^2 > 4h^2$$

sind beyde Werthe unmöglich.

8. §. Es wirke auf den Körper eine Kraft S, die nach irgend einem festen Puncte gerichtet ist. Dies vorausgesetzt, hat man, wenn die Bewegung des Körpers keinen anderen Bedingungen unterworfen ist,

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 x}{d t^2} + S \cdot \frac{x}{r} &= o \\ \frac{d^2 y}{d t^2} + S \cdot \frac{y}{r} &= o \\ \frac{d^2 z}{d t^2} + S \cdot \frac{z}{r} &= o \end{aligned}\right\}$$

weil $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, $\frac{z}{r}$ die Cosinus der Winkel sind, welche die Richtung der Kraft S mit den Achsen der Coordinaten x y z bildet, vorausgesetzt, dass

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

ist. Es ist leicht, zu zeigen, dass die Bahn, welche der Körper beschreiben wird, eine ebene Curve seyn muss. Nimmt man daher die Ebene der x y für die Ebene jener Curve, so ist $z = o$, und es bleiben bloss die beyden ersten Gleichungen übrig.

Nimmt man die Grössen r und v so an, dass man hat

$$x = r \operatorname{Cos} v \text{ und } y = r \operatorname{Sin} v,$$

so kann man aus den beyden ersten der obigen Gleichungen leicht folgende ableiten,

$$\frac{B^2}{r^2} + \frac{B^2 dr^2}{r^4 dv^2} = A - 2 \int S \, dr,$$

wo A, B zwey constante Grössen, und $\int$ das Zeichen der Integration ist.

Aus dieser Gleichung wird man die Kraft S finden, wenn die Gleichung der Bahn, in welcher sich der Körper bewegt, gegeben ist, und umgekehrt.

Eine noch einfachere Gestalt erhält dieser Ausdruck, wenn man die Gleichung der Curve nicht zwischen r und v, wie bisher, sondern zwischen r und dem Lothe p von dem Anfangspuncte der r auf die Tangente der Curve wählt. Für diese Coordinaten ist bekanntlich

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2 dv^2,$$

$$ds = \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2 - p^2}} = \frac{r^2\,dv}{p},$$

und der Krümmungshalbmesser

$$R = \frac{r\,dr}{dp}.$$

Diess vorausgesetzt, wird unsere Gleichung

$$\frac{B^2}{p^2} = A - 2 \int S\,dr, \quad \text{oder}$$

$$S\,dr = -\frac{B^2\,dp}{p^3}.$$

oder endlich

$$S = -\frac{B^2 . r}{p^3 . R}.$$

Ist z. B. r der Radius Vector der Ellipse aus dem einen ihrer Brennpuncte, und a, b ihre halbe grosse und kleine Achse, so ist die Gleichung der Ellipse

$$p^2 = \frac{b^2 . r}{2a - r}.$$

Ist aber r der Radius Vector der Ellipse aus dem Mittelpuncte derselben, so ist die Gleichung der Ellipse

$$p^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2 - r^2}.$$

Eben so ist für die Parabel, wenn r der Radius aus dem Brennpuncte, und a der halbe Parameter derselben ist,

$$p^2 = \frac{a r}{4},$$

für die logarithmische Spirale

$$v = a \log r \text{ und } p = \frac{a r}{\sqrt{1 + a^2}}.$$

für die archimedische Spirale

$$r = a v \text{ und } r^4 = p^2 (a^2 + r^2) \text{ u. s. w.}$$

Nimmt man also z. B. an, dass die Kraft sich wie verkehrt das Quadrat der Entfernung r verhalte, so gibt die Gleichung

$$S d r = - \frac{B^2 d p}{p^3}$$

die Gleichung der Ellipse, in deren einem Brennpuncte der Mittelpunct der Kraft ist, welches bekanntlich der Fall der Natur in unserem Planetensysteme ist. Verhält sich die Kraft, wie die Entfernung selbst, so ist

$$S = m r,$$

also die Bahn wieder eine Ellipse, wo aber der Mittelpunct der Kraft zugleich der Mittelpunct der Ellipse ist. Ist ferner

$$S = \frac{m}{r^3},$$

oder die Kraft, wie verkehrt der Würfel der Entfernung, so ist die Bahn eine logarithmische Spirale: ist

$$S = \frac{m}{r^5},$$

so ist die Bahn ein Kreis, und der Mittelpunct der Kraft in der Pheripherie des Kreises, weil die Gleichung des Kreises, dessen Halbmesser a, für diesen Fall ist

$$p = \frac{r^2}{2a},$$

und alle diese Sätze gelten auch umgekehrt, wie man sich leicht überzeugen wird, nur ist, wenn die Kraft gegeben, und die Curve zu suchen ist, die Integration der Gleichungen oft grossen Schwierigkeiten unterworfen. Wir wollen daher die beyden ersten der oben erwähnten Fälle wieder vornehmen, und zuerst den Fall der Natur näher betrachten.

9. §. Die Kraft verhalte sich, wie verkehrt das Quadrat ihrer Entfernung von dem Körper. Man suche die Bewegung des Körpers.

Setzt man nach dem oben Gesagten als bekannt voraus, dass die Bahn des Körpers in einer Ebene liegt, so hat man, wenn man für diese Ebene jene der x y annimmt, also z = Z = o setzt

$$\left.\begin{array}{l} \frac{d^2 x}{d t^2} + \frac{\mu^2 x}{r^3} = o \\ \frac{d^2 y}{d t^2} + \frac{\mu^2 y}{r^3} = o \end{array}\right\}$$

wo μ^2 eine positive constante Grösse ist. Aus diesen beyden Gleichungen findet man sofort folgende zwey

$$\frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} - \frac{2\mu^2}{r} + \frac{\mu^2}{a} = o$$

$$x dy - y dx = \mu dt . \sqrt{p},$$

wo a und p die Constanten der Integralien bezeichnen.

Setzt man auch hier wieder

$$x = r \operatorname{Cos} v, \; y = r \operatorname{Sin} v,$$

so werden die beyden letzten Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l}\frac{dr^2 + r^2 dv^2}{dt^2} - \frac{2\mu^2}{r} + \frac{\mu^2}{a} = 0 \\ r^2 dv = \mu dt \,.\, \sqrt{p}\end{array}\right\}(A),$$

und wenn man aus ihnen die Grössen dt eliminirt, und $r = \frac{1}{z}$ setzt,

$$dv = \frac{p\,dz}{\sqrt{1 - \frac{p}{a} - (1 - pz)^2}},$$

wovon das Integral ist

$$pz = 1 + \sqrt{1 - \frac{p}{a}} \,.\, \mathrm{Cos}\, v,$$

vorausgesetzt, dass $r = p$ für $v = 90°$ ist. Stellt man den Werth von $z = \frac{1}{r}$ wieder her, und setzt

$$1 - \frac{p}{a} = \varepsilon^2,$$

so hat man

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \,\mathrm{Cos}\, v} = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \,\mathrm{Cos}\, v}$$

für die Gleichung der Bahn, die also eine Linie der zweyten Ordnung, und zwar eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel ist, nachdem a positiv, negativ oder unendlich ist, oder auch, nachdem ε kleiner, grösser als eins, oder gleich eins ist.

Eliminirt man d v aus den beyden Gleichungen (A), so ist

$$dt = \frac{\sqrt{\frac{a}{\mu^2}} \,.\, r\,dr}{\sqrt{a^2 \varepsilon^2 - (a - r)^2}}.$$

Diesen Ausdruck einfacher zu machen, sey

$$r = a(1 - \varepsilon \,\mathrm{Cos}\, u),$$

so ist $\mu\, dt \,.\, a^{-\frac{3}{2}} = (1 - \varepsilon \,\mathrm{Cos}\, u)\, du$,

wovon das Integral ist

$$\mu\, t \,.\, a^{-\frac{3}{2}} = u - \varepsilon \operatorname{Sin} u,$$

wenn u mit t verschwindet.

Die letzte Gleichung gibt u für jede Zeit t, und wenn u bekannt ist, so hat man r und v durch die Gleichungen

$$r = a\,(1 - \varepsilon \operatorname{Cos} u)$$

$$\operatorname{Cos} v = \frac{a\,(1-\varepsilon^2) - r}{r\,\varepsilon}.$$

I. Es ist aber nicht nothwendig, die Auflösung durch die Beschränkung zu vereinfachen, dass die Bahn eine ebene Curve ist, da auch ohne diese Voraussetzung die Integrationen der gegebenen Gleichungen keine besonderen Schwierigkeiten darbiethen. Diese Gleichungen sind nähmlich

$$o = \frac{d^2 x}{d t^2} + \frac{\mu^2 x}{r^3}$$

$$o = \frac{d^2 y}{d t^2} + \frac{\mu^2 y}{r^3}$$

$$o = \frac{d^2 z}{d t^2} + \frac{\mu^2 z}{r^3}.$$

Multiplicirt man die erste derselben durch y, und die andere durch — x, so ist die Summe dieser Producte

$$o = \frac{y\, d^2 x - x\, d^2 y}{d t^2},$$

und eben so

$$o = \frac{z\, d^2 x - x\, d^2 z}{d t^2}$$

$$o = \frac{z\, d^2 y - y\, d^2 z}{d t^2}.$$

Die Integralien dieser Gleichungen sind

$$y\,dx - x\,dy = C\,.\,dt$$
$$z\,dx - x\,dz = C'\,.\,dt$$
$$z\,dy - y\,dz = C''\,.\,dt.$$

Multiplicirt man die erste dieser Integralgleichungen durch z, die zweyte durch — y, und die dritte durch x, so ist ihre Summe

$$o = Cz - C'y + C''x,$$

oder auch

$$z = bx + cy,$$

wenn $c = \frac{C'}{C}$ und $b = -\frac{C''}{C}$ ist.

Multiplicirt man aber die gegebenen Gleichungen nach der Ordnung durch 2dx, 2dy, 2dz, so gibt ihre Summe, wenn man sie zuvor integrirt,

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} - 2\mu^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right) = o \ldots (a),$$

wo a, so wie b und c die Constanten der Integrationen sind.

Multiplicirt man endlich dieselben Gleichungen nach der Ordnung durch x y z, und setzt man zu ihrer Summe die vorhergehende Gleichung, so hat man, weil

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

ist, folgenden Ausdruck

$$\frac{d^2 . r^2}{2dt^2} - \mu^2\left(\frac{1}{r} - \frac{2}{a}\right) = o \ldots (b).$$

Multiplicirt man die letzte Gleichung durch $d.r^2$, und integrirt sie, so hat man

$$\left(\frac{d . r^2}{2dt^2}\right)^2 = 2\mu^2\left(r - \frac{r^2}{a} - h\right) = o \ldots . (c),$$

wo h eine neue Constante ist. Es ist aber

$$\frac{d^2 . r^2}{2} = r d^2 r + dr^2, \quad \text{und}$$

$$\left(\frac{d . r^2}{2}\right)^2 = r^2 dr^2.$$

Dividirt man daher die letzte Gleichung durch r^2, und subtrahirt sie von der Gleichung (b), so erhält man

$$\frac{d^2 r}{d t^2} + \mu^2 \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2h}{r^3}\right) = 0,$$

oder, wenn $p = 2h - r$ ist,

$$\frac{d^2 p}{d t^2} + \mu^2 . \frac{p}{r^3} = 0.$$

Da die letzte Gleichung den anfangs gegebenen drey Gleichungen ähnlich ist, so wird sie, so wie jene, zum Integral geben

$$p = fx + gy,$$

wo f und g zwey neue Constanten sind.

Wir haben also bereits zwey endliche Integralien gefunden,

$$\left.\begin{array}{l} z = bx + cy \\ 2h - r = fx + gy \end{array}\right\} \ldots\ldots (d).$$

Eine dritte wird man noch durch die Gleichung (c) finden, die sich auch so ausdrücken lässt:

$$\frac{r\,dr}{\sqrt{r - \frac{r^2}{a} - h}} = dt . \sqrt{2\mu^2}$$

und wovon das Integral ist

$$\frac{2\mu t \sqrt{2}}{a^3} + A = \text{Arc Sin} \frac{2\sqrt{r - \frac{r^2}{a} - h}}{\sqrt{a - 4h}} - \frac{2\sqrt{r - \frac{r^2}{a} - h}}{\sqrt{a}} \ldots (e).$$

wo A eine Constante ist.

Diese letzte Gleichung gibt r durch t, und die Gleichungen (d) verbunden mit dem Ausdrucke

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

geben die Werthe von x, y und z durch r, also auch durch t. Allein die zu findenden drey Integralien sollen offenbar nur sechs Constanten enthalten, während wir deren sieben haben, nähmlich a, b, c, f, g, h und A. Es muss daher noch eine Bedingungsgleichung zwischen diesen Constanten geben, durch welche ihre Zahl auf sechs gebracht wird. Man sieht, dass dies daher kömmt,

weil man in den endlichen Integralien (d) und (e) auf die Gleichung (a) nicht Rücksicht genommen hat, welche letzte, als Integral, die Constante a schon enthielt. Die gesuchte Bedingungsgleichung wird daher die Constante a ebenfalls enthalten müssen.

Die Gleichungen (d) geben

$$x = \frac{gz - cp}{bg - cf} \text{ und } y = \frac{fz - bp}{cf - bg}.$$

Verbindet man damit die Gleichung

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

so kann man aus diesen letzten drey Gleichungen die Grössen x y z durch Elimination finden. Setzt man, der Kürze wegen

$$q^2 = [(cf - bg)^2 + f^2 + g^2]\,r^2 - (1 + b^2 + c^2)\,p^2$$

so findet man

$$x = \frac{[f + c(cf - bg)]\,p - gq}{(cf - bg)^2 + f^2 + g^2}$$

$$y = \frac{[g - b(cf - bg)]\,p + fq}{(cf - bg)^2 + f^2 + g^2}$$

$$z = \frac{(bf - cg)\,p + (cf - bg)\,q}{(cf - bg)^2 + f^2 + g^2}.$$

Diese drey Ausdrücke geben

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = \frac{(1 + b^2 + c^2)\,dp^2 + dq^2}{(cf - bg)^2 + f^2 + g^2}.$$

Die Gleichungen a und c aber geben

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = \frac{r - \frac{r^2}{a}}{r - \frac{r^2}{a} - h} \,.\, dr^2$$

und da diese beyden Ausdrücke von

$$dx^2 + dy^2 + dz^2$$

identisch seyn müssen, so wird man sie einander gleich setzen, wodurch man erhält, wenn man für p und q ihre Werthe in r substituirt,

$$\frac{4h}{a} = 1 - \frac{(cf - bg)^2 + f^2 + g^2}{1 + b^2 + c^2},$$

und dies ist die gesuchte Bedingungsgleichung.

II. Um nun noch die Bedeutung der durch die Integrationen eingeführten Constanten zu suchen, so ist die Gleichung

$$z = bx + cy$$

offenbar die Gleichung der Ebene der Bahn. Ist k der Winkel der Knotenlinie dieser Bahn in der Ebene der x y mit der Achse der x, und n die Neigung der Bahn gegen die Ebene der x y, so hat man (Capitel II.)

$$c = \text{tg}\, n \,\text{Cos}\, k \quad \text{und}$$

$$b = -\text{tg}\, n \,\text{Sin}\, k,$$

durch welche beyde Gleichungen also die Lage der Ebene der Bahn bestimmt wird.

III. Die Gleichung

$$2h - r = fx + gy$$

wird die Gestalt der von dem Körper beschriebenen krummen Linie geben, und man sieht, dass diese Linie ein Kegelschnitt ist, wo der Brennpunct der Anfang der Coordinaten x y, und wo r der Radius Vector, oder die Entfernung des Körpers von jenem Brennpuncte ist.

Dies vorausgesetzt, wollen wir zuerst die allgemeine Gleichung der Linien der zweyten Ordnung suchen, wenn ihre Ebene gegen die der x y wie immer geneigt ist.

Ist p e r der halbe Parameter, die Excentricität und der Radius Vector der Ellipse, oder eigentlich des Kegelschnittes überhaupt, und ist u der Winkel der r mit der Knotenlinie der Bahn in x y, so wie ψ der Winkel der grossen Achse mit derselben Knotenlinie, so ist bekanntlich die Gleichung des Kegelschnittes

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \operatorname{Cos}(u + \psi)}.$$

Sind dann x''' y''' die rechtwinklichten Coordinaten des Endpunctes von r, wo x''' in der grossen Achse, x''' y''' in der Ebene der Bahn, und wo der Anfang der Coordinaten der Brennpunct ist, so hat man

$$x''' = r \operatorname{Cos}(u + \psi),$$

also wird die vorige Gleichung

$$p - r - \varepsilon x''' = 0.$$

Es seyen nun x'' y'' die rechtwinklichte Coordinaten des Endpunctes von r, aber x'' in der Knotenlinie, und x'' y'' in der Ebene der Bahn, so ist

$$x''' = x'' \operatorname{Cos} \psi - y'' \operatorname{Sin} \psi$$
$$y''' = x'' \operatorname{Sin} \psi + y'' \operatorname{Cos} \psi.$$

Seyen ferner x' y' z' die Coordinaten des Endpunctes von r, aber x' in der Knotenlinie, und x' y' in einer Ebene, die gegen die Ebene der Bahn um den Winkel n geneigt ist, so hat man

$$x'' = x'$$
$$y'' = \frac{y'}{\operatorname{Cos} n}$$
$$z' = y'' \operatorname{Sin} n = y' \operatorname{tg} n.$$

Sind endlich x y z die Coordinaten des Endpunctes von r, aber x in der Linie, die mit der Knotenlinie den Winkel k bildet, und x y noch in derselben Ebene, in welcher x' y' ist, so hat man

$$x' = x \operatorname{Cos} k + y \operatorname{Sin} k$$
$$y' = y \operatorname{Cos} k - x \operatorname{Sin} k.$$

Substituirt man diese Werthe von x''', x'', x', x in einander, so erhält man, da

$$x''' = \frac{p - r}{\varepsilon}$$

ist, für die gesuchte allgemeine Gleichung des Kegelschnittes

$$p - r = \varepsilon x \left(\text{Cos}\, k \,\text{Cos}\, \psi + \frac{\text{Sin}\, k \,\text{Sin}\, \psi}{\text{Cos}\, n} \right)$$
$$+ \varepsilon y \left(\text{Sin}\, k \,\text{Cos}\, \psi - \frac{\text{Cos}\, k \,\text{Sin}\, \psi}{\text{Cos}\, n} \right).$$

Vergleicht man aber diesen Ausdruck mit den oben gefundenen

$$2h - r = fx + gy,$$

so erhält man $p = 2h$ für den halben Barometer, und überdiess

$$f = \varepsilon \left(\text{Cos}\, k \,\text{Cos}\, \psi + \frac{\text{Sin}\, k \,\text{Sin}\, \psi}{\text{Cos}\, n} \right),$$

$$g = \varepsilon \left(\text{Sin}\, k \,\text{Cos}\, \psi - \frac{\text{Cos}\, k \,\text{Sin}\, \psi}{\text{Cos}\, n} \right),$$

und diese Gleichungen geben

$$\text{tg}\, \psi = \frac{f \,\text{Sin}\, k - g \,\text{Cos}\, k}{f \,\text{Cos}\, k + g \,\text{Sin}\, k} \text{Cos}\, n$$

für die Lage der grossen Achse; ferner

$$\varepsilon = \frac{f \,\text{Cos}\, k + g \,\text{Sin}\, k}{\text{Cos}\, \psi}$$

für die Excentricität, und

$$\frac{a}{2} = \frac{p}{1 - \varepsilon^2}$$

für die halbe grosse Achse selbst.

Für $\frac{dr}{dt} = 0$ gibt die Gleichung (c)

$$r = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4h}}{2},$$

und die halbe Summe dieser beyden Werthe von r ist die halbe grosse Achse $\frac{a}{2}$, so wie die halbe Differenz, durch $\frac{a}{2}$ dividirt, die Excentricität

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{4h}{a}}$$

gibt, so dass man also auch hat

$$\text{Cos}\, \psi = \frac{f \,\text{Cos}\, k + g \,\text{Sin}\, k}{\sqrt{1 - \frac{4h}{a}}}.$$

Noch ist von allen Constanten die Grösse A übrig. Setzt man aber

$$\frac{2\sqrt{r - \frac{r^2}{a} - h}}{\sqrt{a - 4h}} = \text{Sin}\, u, \quad \text{und}$$

$$2\, t\, \mu \sqrt{\frac{2}{a^3}} + A = \vartheta,$$

so wird die Gleichung (e) in folgende übergehen

$$\vartheta = u - \varepsilon\, \text{Sin}\, u,$$

eine Gleichung, die wir auch in der ersten Auflösung dieser Aufgabe erhalten haben. Man nennt bekanntlich u die excentrische Anomalie des bewegten Punctes, so wie ϑ die mittlere Anomalie. Für $t = o$ endlich ist $\vartheta = A$, und man nennt A die Epoche des bewegten Punctes in Beziehung auf seine mittlere Anomalie.

10. §. Wir wollen endlich noch den Fall, wo die Kraft der Entfernung selbst proportional ist, näher untersuchen. Wir haben bereits erinnert, dass für diese Voraussetzung die Bahn ebenfalls eine Ellipse ist, deren Mittelpunct aber zugleich der Mittelpunct der Kraft ist.

Ist also die Kraft gleich $\mu^2 . r$, wo $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, so sind die Gleichungen der Bewegung des Körpers

$$\left.\begin{aligned} o &= \frac{d^2 x}{d t^2} + \mu^2 x \\ o &= \frac{d^2 y}{d t^2} + \mu^2 y \\ o &= \frac{d^2 z}{d t^2} + \mu^2 z \end{aligned}\right\} \text{I.}$$

Da jede dieser drey Gleichungen für sich integrabel ist, so hat die Auflösung unserer Aufgabe keine Schwierigkeit. Ehe wir aber zu der vollständigen Entwicklung derselben übergehen, wollen wir bemerken, dass die Bahn des Körpers eine *ebene* Curve seyn wird, wie man sich leicht durch die Gleichungen I überzeugen wird. Nehmen wir für die Ebene der Bahn die der

x y, so fällt die dritte der gegebenen Gleichungen ganz ausser Betrachtung. Setzt man daher, wie zuvor,

$$x = r \operatorname{Cos} v \quad \text{und} \quad y = r \operatorname{Sin} v,$$

und substituirt man diese Werthe von x und y in den beyden ersten der Gleichungen I, multiplicirt dann die erste durch Sin v, und die andere durch — Cos v, so gibt ihre Summe

$$2\, d r\, d v + r\, d^2 v = 0.$$

Multiplicirt man aber die erste durch Cos v und die zweyte durch Sin v, so gibt ihre Summe

$$\frac{d^2 r}{d t^2} - \frac{r\, d v^2}{d t^2} + \mu^2 r = 0 \dots (1).$$

Das Integral der ersten dieser zwey neuen Gleichungen ist

$$\frac{r^2 d v}{d t} = \mu . ab \dots (2),$$

wo $\mu . ab$ eine Constante ist.

Substituirt man den Werth von $\frac{d v}{d t}$ aus (2) in (1), multiplicirt die so entstehende neue Gleichung durch d r, und integrirt, so ist

$$\frac{d r^2}{d t^2} + \frac{\mu^2 a^2 b^2}{r^2} + \mu^2 r^2 = \mu^2 (a^2 + b^2),$$

wo $\mu^2 (a^2 + b^2)$ eine Constante ist.

Man hat daher die zwey folgenden Gleichungen

$$d t = \frac{r\, d r}{\mu \sqrt{- a^2 b^2 + (a^2 + b^2) r^2 - r^4}},$$

$$\text{und } d v = \frac{a b\, d r}{r \sqrt{- a^2 b^2 + (a^2 + b^2) r^2 - r^4}}.$$

Das Integral der letzten ist

$$\operatorname{Sin} (v - \alpha) = \frac{b}{r} . \sqrt{\frac{a^2 - r^2}{a^2 - b^2}} \dots (3),$$

und das Integral der ersten ist

$$t-\beta=\frac{1}{2\mu}.\,\mathrm{ArcCos}\,\frac{2}{a^2-b^2}.\sqrt{-a^2b^2+(a^2+b^2)r^2-r^4}\;\ldots.(4),$$

wo α und β constante Grössen bezeichnen.

Die Gleichung (3) zeigt, dass die Bahn eine Ellipse ist, deren Mittelpunct zugleich der Mittelpunct der Kraft ist, und deren halbe grosse und halbe kleine Achse a und b ist. Der Winkel $(v-\alpha)$, der von dem Radius vector aus dem Mittelpuncte mit der grossen Achse der Ellipse gebildet wird, kann auch hier die wahre Anomalie, und α die Länge der Apsiden heissen. Fangen die Grössen $(v-\alpha)$ und t zugleich an, so hat man $\beta=-\frac{\pi}{4\mu}$, wo $\pi=3.14159$, also die Gleichung (4)

$$r^2=\frac{a^2+b^2}{2}+\tfrac{1}{2}(a^2-b^2)\,\mathrm{Cos}\,2\,\mu t \text{ oder}$$

$$r^2=a^2\,\mathrm{Cos}^2\,\mu t+b^2\,\mathrm{Sin}^2\,\mu t.$$

Die Gleichung (3) aber gibt

$$\mathrm{tg}\,(v-\alpha)=\frac{b}{a}\sqrt{\frac{a^2-r^2}{r^2-b^2}},$$

also, wenn man in ihr den vorhergehenden Werth von r^2 substituirt,

$$\mathrm{tg}\,(v-\alpha)=\frac{b}{a}\,.\,\mathrm{tg}\,\mu t.$$

Sey endlich $b^2=a^2(1-\varepsilon^2)$, wo ε das Verhältniss der Excentricität der Ellipse zur halben grossen Achse derselben bezeichnet, so werden die letzten Ausdrücke

$$\left.\begin{array}{l}\frac{r^2}{a^2}=1-\varepsilon^2\,\mathrm{Sin}^2\,\mu t \quad \text{und}\\ \mathrm{tg}\,(v-\alpha)=(1-\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}.\,\mathrm{tg}\,\mu t\end{array}\right\}$$

Durch diese beyden Gleichungen findet man für jede gegebene Zeit t den Radius vector r sowohl, als die wahre Anomalie $(v-\alpha)$ des Planeten, also den wahren Ort desselben in seiner Bahn.

11. §. In der vorhergehenden einfachen Auflösung unsrer Aufgabe haben wir vorausgesetzt, dass die Bahn

des Planeten mit der Ebene der xy zusammen falle, was aus der Natur des Problems erlaubt war. Aber man kann, ohne die Schwierigkeiten der Aufgabe zu vergrössern, sich auch von dieser Voraussetzung unabhängig machen, und die Aufgabe ganz allgemein auflösen. Zu diesem Zwecke bemerke man, dass die Integralien der drey ersten Gleichungen I sind,

$$\left.\begin{aligned} x &= A \operatorname{Cos} \mu t - B \operatorname{Sin} \mu t \\ y &= A' \operatorname{Cos} \mu t - B' \operatorname{Sin} \mu t \\ z &= A'' \operatorname{Cos} \mu t - B'' \operatorname{Sin} \mu t \end{aligned}\right\} \text{(II)}$$

wo A, B, A'... die sechs Constanten der Integration sind.

Für $t = o$ hat man $x = A$, $y = A'$, $z = A''$ und wenn man die Gleichungen (II) differentiirt

$$\frac{dx}{dt} = -B\mu, \quad \frac{dy}{dt} = -B'\mu, \quad \frac{dz}{dt} = -B''\mu,$$

woraus sofort folgt, dass A, A', A'' die Coordinaten des Planeten im Anfange seiner Bewegung, und dass $-B\mu$, $-B'\mu$, $-B''\mu$ die anfänglichen Geschwindigkeiten desselben nach den Richtungen der Achsen der xyz sind.

Setzt man also diese sechs Constanten als gegeben voraus, so wird man aus ihnen die Elemente der Bahn des Planeten ableiten.

Multiplicirt man zu diesem Zwecke die erste der Gleichungen II durch A' und die zweyte durch $-A$, so gibt ihre Summe

$$o = A'x - Ay + (A'B - AB') \operatorname{Sin} \mu t,$$

und eben so

$$o = B'x - By + (A'B - AB') \operatorname{Cos} \mu t, \text{ das heisst,}$$

$$\operatorname{Sin} \mu t = \frac{\sqrt{(A'B - AB')^2 - (B'x - By)^2}}{AB' - A'B},$$

und wenn man diesen Werth von $\operatorname{Sin} \mu t$ in der vorhergehenden Gleichung substituirt,

$$(A'^2 + B'^2)x^2 + (A^2 + B^2)y^2 - 2(AA' + BB')xy = (AB' - A'B)^2,$$

und eben so

$$(A''^2 + B''^2)x^2 + (A^2 + B^2)z^2 - 2(AA'' + BB'')xz = (AB'' - A''B)^2,$$

$$(A''^2 + B''^2)y^2 + (A'^2 + B'^2)z^2 - 2(A'A'' + B'B'')yz = (A'B'' - A''B')^2,$$

und diess sind die Gleichungen der drey Projectionen der Bahn auf den Ebenen der xy, xz und yz. Diese Projectionen sind also Kegelschnitte, und, wie man leicht sieht, sind sie nach allen Richtungen begränzt, also Ellipsen.

Es war $\text{Sin}\,\mu t = \frac{A'x - Ay}{AB' - A'B}$ und $\text{Cos}\,\mu t = \frac{B'x - By}{AB' - A'B}$, also auch

$$\text{tg}\,\mu t = \frac{A'x - Ay}{B'x - By} \text{ und eben so}$$

$$\text{tg}\,\mu t = \frac{A''x - Az}{B''x - Bz} \text{ und } \text{tg}\,\mu t = \frac{A''y - A'z}{B''y - B'z}.$$

Setzt man daher je zwey dieser drey Werthe von $\text{tg}\,\mu t$ einander gleich, so erhält man

$$o = (A'B'' - A''B')x - (AB'' - A''B)y + (AB' - A'B)z,$$

und dies ist die Gleichung der Ebene der Bahn, in welcher der Planet sich bewegt. Ist daher n die Neigung dieser Ebene der Bahn gegen die Ebene der xy, und k der Winkel, welchen die Knotenlinie dieser Bahn in der Ebene der xy mit der Achse der x bildet, so ist

$$\text{tg}\,k = \frac{A'B'' - A''B'}{AB'' - A''B}, \text{ und}$$

$$\text{tg}\,n = \sqrt{\frac{(A'B'' - A''B')^2 + (AB'' - A''B)^2}{(AB' - A'B)^2}},$$

wodurch also zwey Elemente der Bahn bestimmt sind.

Man bemerke nach dem Vorhergehenden, dass A, A', A'' die Werthe der Coordinaten des Apheliums, und $-B$, $-B'$, $-B''$ die des Periheliums der Ellipse sind, wie man aus den Gleichungen II findet, wenn man $\mu t = o$ und $\mu t = 90$ setzt.

Nennt man daher, wie zuvor, n und k die Neigung und die Länge des Knotens in xy, von der Achse

der x gezählt, einer Ebene, in welcher die Ellipse liegt, deren Mittelpunct der Anfangspunct der Coordinaten, deren halbe grosse und kleine Achse a und b, und bey der der Winkel, welchen die grosse Achse mit der Knotenlinie bildet, α ist, so findet man leicht

$$\left.\begin{array}{l} A = a\,(\mathrm{Cos}\,k\ \mathrm{Cos}\,\alpha - \mathrm{Sin}\,k\ \mathrm{Sin}\,\alpha\ \mathrm{Cos}\,n) \\ A' = a\,(\mathrm{Sin}\,k\ \mathrm{Cos}\,\alpha + \mathrm{Cos}\,k\ \mathrm{Sin}\,\alpha\ \mathrm{Cos}\,n) \\ A'' = a\,.\ \mathrm{Sin}\,\alpha\ \mathrm{Sin}\,n \end{array}\right\}\ \mathrm{III},$$

und wenn man in diesen Ausdrücken $90 + \alpha$ statt α, und b statt a setzt,

$$\left.\begin{array}{l} B = b\,(\mathrm{Cos}\,k\ \mathrm{Sin}\,\alpha + \mathrm{Sin}\,k\ \mathrm{Cos}\,\alpha\ \mathrm{Cos}\,n) \\ B' = b\,(\mathrm{Sin}\,k\ \mathrm{Sin}\,\alpha - \mathrm{Cos}\,k\ \mathrm{Cos}\,\alpha\ \mathrm{Cos}\,n) \\ B'' = -\,b\ \mathrm{Cos}\,\alpha\ \mathrm{Sin}\,n \end{array}\right\}\ \mathrm{IV}.$$

Aus diesen sechs Gleichungen wird man nicht nur die Grössen a, b und α, sondern auch noch die Grössen n und k bestimmen, die mit den vorhergefundenen Werthen von n und k übereinstimmen müssen.

Die drey ersten dieser Gleichungen geben

$$\frac{A}{A''}\ \mathrm{tg}\,\alpha\ \mathrm{Sin}\,n = \mathrm{Cos}\,k - \mathrm{tg}\,\alpha\ \mathrm{Sin}\,k\ \mathrm{Cos}\,n$$

$$\frac{A'}{A''}\ \mathrm{tg}\,\alpha\ \mathrm{Sin}\,n = \mathrm{Sin}\,k + \mathrm{tg}\,\alpha\ \mathrm{Cos}\,k\ \mathrm{Cos}\,n,$$

oder

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\mathrm{Cos}\,k}{\frac{A}{A''}\ \mathrm{Sin}\,n + \mathrm{Sin}\,k\ \mathrm{Cos}\,n}$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\mathrm{Sin}\,k}{\frac{A'}{A''}\ \mathrm{Sin}\,n - \mathrm{Cos}\,k\ \mathrm{Cos}\,n}.$$

Setzt man beyde Werthe von $\mathrm{tg}\,\alpha$ einander gleich, so hat man

$$\mathrm{Cotg}\,n = \frac{A'}{A''}\ \mathrm{Cos}\,k - \frac{A}{A''}\ \mathrm{Sin}\,k,$$

und wenn man die drey Gleichungen für B eben so behandelt,

$$\mathrm{Cotg}\,n = \frac{B'}{B''}\ \mathrm{Cos}\,k - \frac{B}{B''}\ \mathrm{Sin}\,k.$$

Setzt man beyde Werthe von Cotg n einander gleich, so erhält man den Werth von tg k, und wenn man diesen Werth von tg k in einer der beyden letzten Gleichungen substituirt, den Werth von Cotg n. Man wird sich leicht überzeugen, dass diese Werthe von tg k und Cotg n mit den vorhin auf einem andern Wege gefundenen übereinstimmen.

Quadrirt man die vorhergehenden drey Ausdrücke von A, A′, A″, so gibt ihre Summe

$$a^2 = A^2 + A'^2 + A''^2,$$

und eben so

$$b^2 = B^2 + B'^2 + B''^2,$$

durch welche beyden Gleichungen also die Werthe der beyden Achsen der Ellipse gegeben sind.

Um noch die Grösse α, oder die Elongation des Periheliums von dem Knoten zu finden, multiplicire man die erste der Gleichungen III durch Cos k, und die zweyte durch Sin k, so ist ihre Summe

$$a \operatorname{Cos} \alpha = A \operatorname{Cos} k + A' \operatorname{Sin} k.$$

Eben so geben die beyden ersten der Gleichungen IV

$$b \operatorname{Sin} \alpha = B \operatorname{Cos} k + B' \operatorname{Sin} k,$$

also aus beyden,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} \cdot \frac{B + B' \operatorname{tg} k}{A + A' \operatorname{tg} k}.$$

Substituirt man in diesem Ausdrucke den oben gefundenen Werth von tg k, so erhält man

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{B(AB'' - A''B) + B'(A'B'' - A''B')}{A(AB'' - A''B) + A'(A'B'' - A''B')} \cdot \sqrt{\frac{A^2 + A'^2 + A''^2}{B^2 + B'^2 + B''^2}},$$

und damit sind alle Elemente der Bahn bestimmt.

Die Summe der Quadrate der Gleichungen II gibt noch

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$
$$= (A^2 + A'^2 + A''^2) \operatorname{Cos}^2 \mu t + (B^2 + B'^2 + B''^2) \operatorname{Sin}^2 \mu t$$
$$- 2(AB + A'B' + A''B'') \operatorname{Sin} \mu t \operatorname{Cos} \mu t.$$

Aber da, nach dem Vorhergehenden,

$$A^2 + A'^2 + A''^2 = a^2$$
$$B^2 + B'^2 + B''^2 = b^2,$$

und, wie man leicht sieht,

$AB + A'B' + A''B'' = o$ ist, so hat man

$$r^2 = a^2 \operatorname{Cos}^2 \mu t + b^2 \operatorname{Sin}^2 \mu t,$$

wie zuvor.

12. §. Man kann aber auch dieselbe Aufgabe noch auf eine andere, merkwürdige und nicht minder einfache Weise auflösen. Zu diesem Zwecke wollen wir die erste der Gleichungen I durch y, und die zweyte durch — x multipliciren, so ist ihre Summe, wenn man sie integrirt,

$$\left.\begin{array}{c} x\,dy - y\,dx = c\,.\,dt \\ \text{und eben so} \\ x\,dz - z\,dx = c'.\,dt \\ y\,dz - z\,dy = c''.\,dt \end{array}\right\} (A),$$

wo c, c', c'' constante Grössen sind.

Multiplicirt man von den Gleichungen (A), die erste durch z, die zweyte durch — y, und die dritte durch x, so ist ihre Summe

$$o = c''.x - c'.y + c.z \;\ldots.\; (B),$$

welches die Gleichung der Bahn ist, so wie die drey Gleichungen (A) den bekannten Grundsatz der Erhaltung der Flächen ausdrücken.

Wenn daher die Grössen k und n die vorige Bezeichnung haben, so ist

$$\operatorname{tg} k = \frac{c''}{c'} \text{ und } \operatorname{tg} n = \sqrt{\frac{c'^2 + c''^2}{c^2}},$$

und dadurch zwey Elemente der Bahn bekannt.

Multiplicirt man die Gleichungen I nach der Ordnung durch 2dx, 2dy, 2dz, so ist ihre Summe, wenn man sie integrirt,

$$o = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} + 2\mu^2 \int (x\,dx + y\,dy + z\,dz),$$

oder

$$o = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} + \mu^2 r^2 - \mu^2 (a^2 + b^2) \ldots. (C),$$

wo $(a^2 + b^2)$ eine constante Grösse bezeichnet. Daraus folgt, dass die Geschwindigkeit des Planeten in jedem Puncte seiner Bahn ist

$$\mu \sqrt{a^2 + b^2 - r^2}.$$

Multiplicirt man aber dieselben Gleichungen I nach der Ordnung durch x, y, z, so ist ihre Summe

$$o = \frac{x\,d^2x + y\,d^2y + z\,d^2z}{dt^2} + \mu^2 r^2.$$

Addirt man diese Gleichung zu der vorhergehenden, und bemerkt, dass

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 + xd^2x + yd^2y + zd^2z = dr^2 + rd^2r = \tfrac{1}{2} d^2.(r^2)$$

ist, so erhält man

$$o = \frac{1}{2} \frac{d^2.(r^2)}{dt^2} + \mu^2 (2r^2 - a^2 - b^2),$$

und dieser Gleichung endliches Integral ist

$$r^2 = \tfrac{1}{2}(a^2 + b^2) + \tfrac{1}{2}(a^2 - b^2) \operatorname{Cos}(2\mu t + m) \ldots. (D),$$

wo $(a^2 - b^2)$ und m die zwey Constanten der doppelten Integration sind. Die letzte Gleichung gibt unmittelbar den Werth des Radius vector r durch die Zeit t.

Es ist also zur vollständigen Bestimmung des Ortes des Planeten nur noch übrig, den Winkel v, welchen r mit der Knotenlinie der Bahn in der Ebene der xy bildet, ebenfalls durch t auszudrücken. Ist so r und v bekannt, so kann man auch die Coordinaten xyz des Planeten durch die Zeit ausdrücken, da man hat, wenn n und k die vorige Bezeichnung beybehalten,

$$\left.\begin{aligned} x &= r(\operatorname{Cos} v \operatorname{Cos} k - \operatorname{Sin} v \operatorname{Cos} k \operatorname{Cos} n) \\ y &= r(\operatorname{Cos} v \operatorname{Sin} k + \operatorname{Sin} v \operatorname{Cos} k \operatorname{Cos} n) \\ z &= r \operatorname{Sin} v \operatorname{Sin} n \end{aligned}\right\} E.$$

Diese drey Gleichungen geben, wenn man sie in Beziehung auf r und v differentiirt

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 dv^2,$$

also ist die Gleichung (C)

$$o = \frac{dr^2 + r^2 dv^2}{dt^2} + \mu^2 (r^2 - a^2 - b^2), \text{ oder}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{r} \cdot \sqrt{\mu^2 (a^2 + b^2 - r^2) - \frac{dr^2}{dt^2}}.$$

Die Gleichung D gibt, wenn man sie differentiirt,

$$\frac{dr}{dt} = \frac{-\frac{1}{2}\mu (a^2 - b^2) \operatorname{Sin} (2\mu t + m)}{\sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2) + \frac{1}{2}(a^2 - b^2) \operatorname{Cos} (2\mu t + m)}}.$$

Substituirt man in der vorletzten Gleichung den so eben gefundenen Werth von $\frac{dr}{dt}$, und für r^2 den Werth dieser Grösse aus der Gleichung D, so erhält man

$$\frac{dv}{dt} = \frac{2ab\mu}{(a^2 + b^2) + (a^2 - b^2) \operatorname{Cos} (2\mu t + m)},$$

wovon das Integral ist

$$\operatorname{tg} 2 (v - \alpha) = \frac{2ab \operatorname{Sin} (2\mu t + m)}{(a^2 - b^2) + (a^2 + b^2) \operatorname{Cos} (2\mu t + m)},$$

wo α eine Constante bezeichnet. Aus der letzten Gleichung folgt auch der einfachere Ausdruck

$$\operatorname{tg} (v - \alpha) = \frac{b}{a} \cdot \operatorname{tg} \frac{2\mu t + m}{2},$$

woraus folgt, dass die Bahn eine Ellipse ist, deren Mittelpunct der Mittelpunct der Kraft, und deren halbe grosse und kleine Achse a und b ist.

Fängt man die Zeit in einem der beyden Endpuncte der grossen Achse an, so ist $m = o$, und

$$\operatorname{tg} (v - \alpha) = \frac{b}{a} \operatorname{tg} \mu t,$$

$$r^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} + \frac{a^2 - b^2}{2} \operatorname{Cos} 2\mu t = a^2 \operatorname{Cos}^2 \mu t + b^2 \operatorname{Sin}^2 \mu t$$

wie zuvor. Diese beyden Gleichungen geben überdiess

$$\operatorname{Sin} (v - \alpha) = \frac{b}{r} \operatorname{Sin} \mu t$$

$$\operatorname{Cos} (v - \alpha) = \frac{a}{r} \operatorname{Cos} \mu t.$$

Die beyden letzten Ausdrücke geben auch

$$\operatorname{Sin} v \operatorname{Sin} \alpha + \operatorname{Cos} v \operatorname{Cos} \alpha = \frac{a}{r} \operatorname{Cos} \mu t$$

$$\operatorname{Sin} v \operatorname{Cos} \alpha - \operatorname{Cos} v \operatorname{Sin} \alpha = \frac{b}{r} \operatorname{Sin} \mu t,$$

woraus man die Werthe von Sin v und Cos v findet,

$$\operatorname{Sin} v = \frac{a}{r} \operatorname{Cos} \mu t \operatorname{Sin} \alpha + \frac{b}{r} \operatorname{Sin} \mu t \operatorname{Cos} \alpha$$

$$\operatorname{Cos} v = \frac{a}{r} \operatorname{Cos} \mu t \operatorname{Cos} \alpha - \frac{b}{r} \operatorname{Sin} \mu t \operatorname{Sin} \alpha.$$

Substituirt man aber diese Werthe von Sin v und Cos v in den Gleichungen (E), so findet man die Gleichungen II des §. 3 wieder, vorausgesetzt, dass A, B... die in III und IV angezeigten Werthe haben.

I. Die Gleichung $\operatorname{tg} (v - \alpha) = \frac{b}{a} \operatorname{tg} \mu t$ gibt

$$t = \frac{1}{\mu} \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \left(\frac{a}{b} \operatorname{tg} (v - \alpha)\right)$$

$v - \alpha = 0$ gibt $t' = 0$, und

$v - \alpha = 90$ gibt $t'' = \frac{\pi}{2\mu}$, wo $\pi = 3.14159$,

woraus folgt, dass die Zeit der ganzen Revolution des Planeten um den Mittelpunct der Ellipse gleich

$$\frac{2\pi}{\mu}$$

ist. Diese Zeit ist also unabhängig von a und b, und bey allen Planeten dieselbe.

II. Ist f die Fläche des elliptischen Sectors, so ist
$f = \frac{1}{2} \int r^2 \, dv = \frac{1}{4} \int [(a^2 + b^2) + (a^2 - b^2) \operatorname{Cos} 2\mu t] \, . \, dv.$

Aber die erste Gleichung des Nro. I gibt

$$dv = \frac{a b \mu \, dt}{a^2 \operatorname{Cos}^2 \mu t + b^2 \operatorname{Sin}^2 \mu t}.$$

Substituirt man diesen Werth von dv in der vorhergehenden Gleichung, so hat man

$$f = \frac{1}{2} \int a b \mu \, dt = \frac{1}{2} a b \mu t,$$

Die Fläche ist also gleich dem Producte der beyden Halbachsen in die Summe der Massen der Planeten und der Sonne, und in die Zeit, die seit dem Durchgange des Planeten durch die grosse Achse verflossen ist.

Ist in dem letzten Ausdrucke $t = \frac{2\pi}{\mu}$, das heisst, die Revolution der Planeten, so hat man $f = ab\pi$ für die ganze Fläche der Ellipse, wie bekannt.

III. Beschreibt man aus dem Mittelpuncte C der Ellipse mit dem Halbmesser a einen Kreis, und verlängert die auf a senkrechte Ordinate PM des Punctes M der Ellipse, bis sie dem Kreise in m begegnet, so ist

$$\frac{\operatorname{tg} mCP}{\operatorname{tg} MCP} = \frac{a}{b},$$

und da $MCP = v - \alpha$, so ist auch $mCP = \mu t$, oder MCP ist *wahre*, und mCP die *mittlere* Anomalie des Planeten M.

IV. Ist ME parallel mit mC, so ist $MEP = \mu t$, also auch, wie man aus dem Dreyecke CME leicht findet, $CE = (a - b) \operatorname{Cos} \mu t$. Würde sich also in der Linie EP ein Beobachter in dem veränderlichen Puncte E so bewegen, dass immer $CE = (a - b) \operatorname{Cos} \mu t$ wäre, so würde diesem Beobachter die Bewegung des Planeten gleichförmig erscheinen. Verlängert man ME, bis sie die kleine Achse DC in N trifft, so ist $NE = a - b$.

V. Es ist

$$\operatorname{tg}(\mu t - (v - \alpha)) = \frac{\operatorname{tg}\mu t - \operatorname{tg}(v - \alpha)}{1 + \operatorname{tg}\mu t \cdot \operatorname{tg}(v - \alpha)} = \frac{(a - b)\operatorname{tg}\mu t}{a + b \operatorname{tg}^2 \mu t},$$

und $d \cdot \operatorname{tg}(\mu t - (v - \alpha)) = 0$, gibt

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{tg}\mu t = \sqrt{\frac{a}{b}} \\ \text{also auch} \\ \operatorname{tg}(v - \alpha) = \sqrt{\frac{b}{a}} \\ \text{und} \\ r = \sqrt{ab} \end{array}\right\}$$

welche Ausdrücke die mittlere, die wahre Anomalie, und den Radius vector für den Ort *der grössten Gleichung des Mittelpunctes* geben, und diese grösste Gleichung selbst ist

$$\mu t - (v - \alpha) = \text{Arc tg} \frac{a - b}{2\sqrt{ab}}.$$

VI. Die oben gegebenen Ausdrücke lassen sich auch sehr leicht in Reihen entwickeln. So gibt die Gleichung

$$\text{tg}\,(v - \alpha) = \frac{b}{a}\,\text{tg}\,\mu t, \quad \text{sofort}$$

$$v - \alpha = \mu t - P\,\text{Sin}\,2\,\mu t + \tfrac{1}{2}P^2\,\text{Sin}\,4\,\mu t - \tfrac{1}{3}P^3\,\text{Sin}\,6\,\mu t + $$

und $\mu t = (v - \alpha) + P\,\text{Sin}\,2\,(v - \alpha) + \frac{1}{2}P^2\,\text{Sin}\,4\,(v - \alpha) + \frac{1}{3}P^3\,\text{Sin}\,6\,(v - \alpha) +$

$$\text{wo } P = \frac{a - b}{a + b}.$$

Die Gleichung $r^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} + \frac{a^2 - b^2}{2}\,\text{Cos}\,2\,\mu t$ aber gibt

$$\log r = \log \frac{a + b}{2} - P\,\text{Cos}\,2\,\mu t - \tfrac{1}{2}P^2\,\text{Cos}\,4\,\mu t + \tfrac{1}{3}P^3\,\text{Cos}\,6\,\mu t - .$$

VII. Setzt man endlich die Bahnen kreisförmig oder $a = b$, und den Halbmesser der Erdbahn gleich der Einheit voraus, so ist für den geocentrischen Stillstand des Planeten der Cosinus des Winkels an der Sonne

$$\frac{a^2 - 1}{2a},$$

und die Tangente des Winkels an dem Planeten

$$\frac{\sqrt{-a^4 + 6a^2 - 1}}{a^2 + 1},$$

also kein Stillstand möglich, wenn $a > (1 + \sqrt{2})$ ist.

Inhalt.

Erstes Capitel.

Gerade Linien.

I. *Gerade Linien in einer Ebene.*

Seite

Bestimmung der Lage eines Punctes in einer gegebenen Ebene. 8

Bestimmung der Lage einer geraden Linie in einer gegebenen Ebene. 9

Gleichung der Geraden, die durch zwey gegebene Puncte geht. 10

Winkel zweyer gegebenen Gerade. 11

Parallele und senkrechte Gerade. —

Durchschnittspunct zweyer gegebenen Geraden. . . 12

Gerade, die durch einen gegebenen Punct geht, und einer gegebenen Geraden parallel ist. —

Gerade, die durch einen gegebenen Punct geht, und auf einer gegebenen Geraden senkrecht steht. . . —

Länge der gesuchten Senkrechten. 13

Gerade, die durch einen gegebenen Punct geht, und mit einer gegebenen Geraden einen gegebenen Winkel bildet. —

Den Punct suchen, von welchem die Lothe auf die Schenkel eines gegebenen Winkels ein gegebenes Verhältniss haben. 14

Die Gerade suchen, welche die Eigenschaft hat, dass die Summe der Lothe von gegebenen Puncten auf diese Gerade, jedes Loth durch eine gegebene Grösse multiplicirt, gleich Null ist. 15

Den Punct suchen, dessen quadrirte Distanzen von andern gegebenen Puncten einem gegebenen Quadrate gleich sind. 16

Durch zwey gegebene Puncte Gerade ziehen, die auf einander senkrecht sind, oder einen gegebenen Winkel bilden. 17

Seite

Eine Gerade von gegebener Länge bewegt sich mit ihren Endpuncten auf den Schenkeln eines rechten Winkels. Man suche die Curve, welche ein gegebener Punct dieser Geraden beschreibt. 18

Den Mittelpunct eines Kreises suchen, dessen Peripherie durch einen gegebenen Punct geht, und eine der Achsen der Coordinaten berührt. 20

Die Lage und Grösse des Kreises finden, der drey andere ihrer Lage und Grösse nach gegebene Kreise berührt. 21

Projectionen eines Punctes auf eine Linie, oder auf eine Ebene. 23

Projectionen der Polygone auf eine Linie. . . . 24

Coordinaten der Polygone. 25

Anwendungen auf das Vier- und Fünfeck. . . . 26

II. *Gerade Linien im Raume.*

Bestimmung der Lage eines Punctes im Raume. . . 27

Gleichungen der Puncte, Linien und Ebenen überhaupt. 28

Bestimmung der Lage der geraden Linien im Raume. . 29

Gerade, die durch zwey gegebene Puncte geht. . . 30

Winkel zweyer gegebenen Geraden. 32

Parallele und senkrechte Geraden. 33

Bedingung, wenn zwey Gerade sich schneiden. . . —

Winkel einer gegebenen Geraden mit den Achsen der Coordinaten. 34

Gerade, die durch einen gegebenen Punct geht, und mit einer anderen Geraden parallel, oder auf ihr senkrecht ist. 35

Gerade, die auf zwey gegebenen Geraden senkrecht steht. 36

Den Punct suchen, dessen quadrirte Distanzen von einem gegebenen Punct gleich einem gegebenen Quadrate sind. 37

Anwendung auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung. . . 38

Coordinaten des Schwerpunctes eines Körpers. . . 40

Zweytes Capitel.

Ebenen.

Gleichung einer Ebene überhaupt. 41

Winkel der Knotenlinien der Ebenen mit den Achsen der Coordinaten. 42

Seite
Durchschnitt von zwey gegebenen Ebenen. . . . 43
Durchschnitt der Ebene mit geraden Linien. . . . 44
Ebene, die auf einer gegebenen Geraden senkrecht steht. —
Winkel von zwey gegebenen Ebenen. 45
Parallele und senkrechte Ebenen. 46
Winkel einer Ebene mit den coordinirten Ebenen und mit den Achsen der Coordinaten. —
Winkel einer Ebene mit einer gegebenen Geraden. . 47
Von einer gegebenen Ebene I. die Neigung derselben gegen die coordinirten Ebenen, II. die Winkel der Knotenlinien mit den Achsen der Coordinaten, III. die Winkel der Knotenlinien unter sich u. f. zu finden. 48
Relationen dieser Grössen gegen einander. . . . 49
Winkel einer gegebenen Geraden in einer gegebenen Ebene; des Radius, I. mit den Achsen der Coordinaten, II. mit den coordinirten Ebenen, III. der Projectionen des Radius mit den Achsen der Coordinaten, IV. mit den Knotenlinien u. f. 51
Relationen dieser Grössen gegen einander. . . . 52
Ebene, die durch einen gegebenen Punct parallel mit einer gegebenen Ebene geht. —
Gleichung der Ebene, die durch drey gegebene Puncte geht. 53
Bedeutung der constanten Grössen dieser Gleichung. . —
Projectionen eines Dreyeckes in den coordinirten Ebenen. 54
Folgerung aus dem Vorhergehenden. 55
Projectionen jeder ebenen Fläche auf die drey coordinirten Ebenen. —
Drey merkwürdige Formen der Gleichungen einer Ebene. 56
Folgerungen daraus. 57
Projectionen der zweyten und höheren Ordnungen. . . 58
Projectionen gegebener Flächen auf andere gegebene Ebenen. 59
Ebene, auf welcher die Summe der Projectionen gegebener Flächen ein Maximum ist. 61
Gleichungen der Durchschnittslinien von zwey gegebenen Ebenen. 62
Gerade, die durch einen gegebenen Punct geht, und mit einer gegebenen Geraden einen gegebenen Winkel bildet. 63
Ebene, die durch einen gegebenen Punct und durch eine gegebene Gerade geht. 64
Ebene, die durch einen gegebenen Punct geht, und mit zwey gegebenen Geraden parallel ist. . . . —

Seite

Ebene, die auf einer gegebenen Geraden senkrecht steht. 65
Gerade, die durch einen gegebenen Punct senkrecht auf eine gegebene Gerade geht. —
Coordinaten des Durchschnittspunctes der beyden letzten Geraden. 66
Gerade, die durch einen gegebenen Punct senkrecht auf eine gegebene Ebene geht. —
Coordinaten der Durchschnittspuncte dieser Geraden mit der auf ihr senkrechten Ebene. 67
Gerade, welche auf zwey gegebenen Geraden senkreckt steht. 68
Kürzeste Distanz von zwey gegebenen Geraden. . . 69
Relationen von drey unter einander senkrechten Linien, und von drey unter einander senkrechten Ebenen, die alle durch den Mittelpunct einer Kugel gehen . 71
Dieselben Relationen allgemeiner. 72
Fläche, welche durch die Bewegung des Durchschnittspunctes von drey unter einander senkrechten Ebenen entsteht, deren jede eine von drey gegebenen concentrischen Kugeln berührt. 73
Fläche, welche durch die Bewegung des Durchschnittspunctes von drey unter einander senkrechten Ebenen entsteht, deren jede ein gegebenes Ellipsoid berührt. 75
Ebene, welche die Eigenschaft hat, dass die Summe aller Geraden, welche von gegebenen Puncten ausser der Ebene auf sie senkrecht gezogen werden, gleich einer gegebenen Geraden ist. 78
Aufgabe über eine Anzahl gegebener Puncte ausser einer gegebenen Ebene. 79
Fläche, welche durch den Durchschnitt von zwey unter sich senkrechten Ebenen entsteht, deren jede durch den Schenkel eines gegebenen Winkels geht. . . 80
Fläche, welche durch den Durchschnitt von zwey unter sich senkrechten Ebenen entsteht, deren jede durch eine von zwey gegebenen Geraden geht. . . . 81
Lage eines Punctes, dessen Distanzen von drey gegebenen Puncten bekannt ist. —
Kugel, welche vier andere gegebene Kugeln berührt. . 83
Kugel, welche durch einen gegebenen Punct geht, und drey gegebene Kugeln berührt, oder welche eine Ebene und drey Kugeln, oder zwey Ebenen und zwey Ku-

Seite

geln, oder drey Ebenen und eine Kugel, oder endlich, welche vier Ebenen berührt. 87

Drittes Capitel.

Berührung der Curven.

Bedingungen der Berührung der ersten und der höheren Ordnungen. 90
Gleichung der Tangente einer gegebenen ebenen Curve. . 91
Subtangente, Subnormale u. f. 93
Kreis, der mit einer gegebenen ebenen Curve eine Berührung der ersten Ordnung hat. —
Krümmungskreis einer gegebenen ebenen Curve. . . 94
Der Mittelpunct des Krümmungskreises ist der Durchschnitt zweyer nächster Normalen. 95
Winkel dieser zwey nächsten Normalen. . . . 96
Krümmungskreis der apollonischen Parabel und der Cycloide. 97
Kubische und höhere Parabeln, die mit einer gegebenen ebenen Curve eine Berührung der dritten, und einer höheren Ordnung hat. 98
Tangenten der Curven von doppelter Krümmung. . . 100
Normalen dieser Curven. 101
Krümmungskreis einer Curve von doppelter Krümmung. . 102
Winkel der Contingenz einer Curve von doppelter Krümmung. 104
Curven, deren Subtangente constant, oder gleich der doppelten Abscisse, oder deren Subnormale constant ist u. f. 105
Curve, deren Krümmungshalbmesser sich wie die Würfel der Normalen verhalten. 106
Curve, deren Normale sich verhält, wie die Quadratwurzel aus der Summe der Abscisse und Subnormale. . 107
Der Scheitel eines Winkels bewegt sich auf der Peripherie einer Ellipse, während seine beyden Schenkel eine andere concentrische Ellipse berühren. Man suche die Curve, welche die Sehne immer berührt, die durch die beyden Berührungspuncte geht. 108
Dieselbe Aufgabe, wenn der Scheitel des Winkels sich auf einer Geraden bewegt. 110
Eine Fläche wird von einer Reihe paralleler Ebenen ge-

Seite

schnitten. Welches ist die Curve, die auf allen Schnitten der Fläche senkrecht steht? 111
Eine Gerade bewegt sich in einer Ebene nach einem gegebenen Gesetze. Man suche die Curve, welche von jener Geraden in allen ihren Puncten unter einem gegebenen Winkel geschnitten wird. 113
Die Trajectorie einer gegebenen ebenen Curve finden. . 114
Die Curve finden, welche eine Folge von gegebenen Ellipsen nach einem gegebenen Gesetze schneidet. . . 117
Die Curve finden, welche eine Folge von Parabeln nach einem gegebenen Gesetze schneidet. . . . 118
Eine Gerade von gegebener Grösse bewegt sich mit ihren Endpuncten auf den Schenkeln eines rechten Winkels. Man suche die Curve, welche von diesen Geraden in allen ihren Lagen tangirt wird. 119

Viertes Capitel.

Berührung der Flächen und normale Ebenen der Curven von doppelter Krümmung.

Berührungen der Flächen der ersten und zweyten Ordnung. 121
Tangirende Ebene einer gegebenen Fläche. . . . 122
Normalen einer gegebenen Fläche. 123
Unter allen Geraden, welche in der tangirenden Ebene durch den Berührungspunct gezogen werden können, jene zu finden, welche mit der Ebene der xy den grössten Winkel bildet. 124
Kugel, die mit einer gegebenen Fläche eine Berührung der ersten Ordnung hat. 125
Nähere Beschränkung des Halbmessers R dieser Kugel. . 126
Bestimmung der Curven, die auf der Fläche durch den Berührungspunct derselben mit der Kugel gehen, für welche der Werth von R ein Grösstes oder ein Kleinstes ist. 127
Es gibt nur zwey solcher Curven. 128
Krümmungshalbmesser dieser zwey Curven. . . . —
Diese beyden Curven stehen auf einander senkrecht. . 129
Vereinfachung der vorhergehenden Betrachtungen durch die Annahme, dass die Ebene der xy mit der tangirenden Ebene parallel ist. —

Seite

Werthe des grössten und kleinsten Krümmungshalbmessers in jedem Puncte der Fläche. 130
Gleichung der auf einer gegebenen Curve von doppelter Krümmung normalen Ebene. 132
Krümmungsebene einer Curve von doppelter Krümmung. 133
Flexionswinkel einer Curve von doppelter Krümmung. . 134
Betrachtung der Curven als Polygone von unendlich kleinen Seiten. —
Bestimmung der Krümmung einer Fläche durch die Betrachtung der Puncte derselben, deren nächste Normalen sich schneiden. 135
Curven der grössten und kleinsten Krümmung einer Fläche. 138
Anwendung auf Rotationsflächen. 139
Gleichungen der Projectionen der Curven der grössten und kleinsten Krümmung. 140
Allgemeine Betrachtung des Systemes von Geraden, die durch alle Puncte einer Fläche nach einem gegebenen Gesetze gezogen werden. —
Bestimmung der Krümmung der Flächen durch die Betrachtung der Projectionen des Elementes der beyden Krümmungscurven. 141
Reciproke Tangenten einer Fläche. 146

Fünftes Capitel.

Flächen der zweyten Ordnung.

Aenderung der Coordinaten.

Änderung des Anfangspunctes. 148
Änderung der rechtwinklichten Coordinaten in Polarcoordinaten. 149
Verwandlung der rechtwinklichten Coordinaten in andere geradlinichte und schiefwinklichte Coordinaten. . . . 150
Verwandlung der rechtwinklichten Coordinaten in andere, wieder rechtwinklichte. 152
Umformung der Bedingungsgleichungen, welche bey diesen Verwandlungen Statt haben. 153
Eine andere, bequemere Verwandlung rechtwinklichter Coordinaten in andere, wieder rechtwinklichte. . . . 154
Anwendungen schiefwinklichter Coordinaten auf vorhergehende Betrachtungen. 156

Seite

Flächen der zweyten Ordnung.

Allgemeine Gleichung dieser Flächen. 159
Reduction dieser Gleichung auf die einfachste Form. . 160
Eintheilung dieser Flächen in zwey Classen. . . . 162

Flächen der ersten Classe.

Ellipsoid. 164
Hyperboloid mit einem Fache. 166
Hyperboloid mit zwey Fächern. 167

Flächen der zweyten Classe.

Elliptisches Paraboloid. 169
Hyperbolisches Paraboloid 170
Parabolischer Cylinder. 172
Bestimmung, ob eine gegebene Fläche der zweyten Ordnung in die erste oder zweyte Classe gehört. . . 173
Von den Flächen der ersten Classe den Werth einer ihrer drey rechtwinklichten Halbachsen finden. . . . 174
Nähere Bestimmung einer gegebenen Fläche der zweyten Ordnung. 175
Beyspiele. 178

Sechstes Capitel.

Einhüllende Curven.

Vorläufige Betrachtungen aus der Integralrechnung. . . 180
Veränderung des beständigen Parameters einer ebenen Curve. 184
Bestimmung der einhüllenden Curve (Enveloppe) einer gegebenen ebenen Curve. 185
Dieselbe Bestimmung durch die Betrachtung der gemeinschaftlichen Tangenten beyder Curven. . . . 186
Merkwürdiges Beyspiel. 187
Wenn der Mittelpunct eines seiner Grösse nach gegebenen Kreises sich auf einer gegebenen ebenen Curve bewegt, die Curve finden, welche alle diese Kreise einhüllt. 189
Ausdehnung des Vorhergehenden auf einhüllende Curven, die mit ihren eingehüllten Berührungen höhere Ordnungen haben. 191
Parallele Curven. 192
Eigenschaften der parallelen Curven. 194

Seite

Curve, welche durch die Bewegung einer Geraden entsteht, wenn die Summe ihrer Entfernungen von dem Anfangspuncte der Coordinaten immer eine constante Grösse ist. 195
Wenn ihre senkrechte Entfernung von dem Anfangspuncte eine constante Grösse ist u. f. 196

Siebentes Capitel.

Einhüllende Flächen.

Anwendung der vorhergehenden Betrachtungen auf Flächen. 197
Bestimmung der einhüllenden Fläche durch endliche Gleichungen. 198
Bestimmung der Charakteristik. —
Bestimmung der Wendungscurve. 199
Erläuterndes Beyspiel, bewegliche Kugel. . . . 200
Eine andere Bestimmung der einhüllenden Fläche, der Charakteristik und der Wendungscurve durch Differentialgleichungen. 202
Unmittelbare Bestimmung dieser Differentialgleichungen. . 204
Ableitung der Charakteristik aus der einhüllenden Fläche. 206
Zweytes Beyspiel, beweglicher Kegel. 207
Neue Ableitung der einhüllenden Fläche aus der eingehüllten. 208
Jede einhüllende Fläche hat eine unendliche Menge eingehüllter Flächen 209
Bestimmung der Gleichung der Wendungscurve in partiellen Differentialien. 211
— — — und mit gewöhnlichen Differentialien. . . 212
Bedeutung der Gleichungen mit gewöhnlichen Differentialien, welche den Bedingungen der Integrabilität nicht Genüge thun. 213
Erstes Beyspiel. 214
Zweytes Beyspiel. 215
Drittes Beyspiel. 216
Dasselbe gilt selbst von lineären Differentialgleichungen. 217
Erstes Beyspiel. 218
Zweytes Beyspiel. 220
Bestimmung der Curve, unter welcher die äusserste Gränze einer gegebenen Fläche dem Auge erscheint. . . 221
Aus dem Vorhergehenden folgende allgemeine Betrachtung. 222
Bestimmung der Fläche, welche durch die Bewegung einer

Seite

gegebenen Fläche entsteht, wenn die letzte sich nach einem gegebenen Gesetze auf einer dritten gegebenen Fläche bewegt. 223
I. Beyspiel. 224
II. Beyspiel. 225
Bestimmung der Fläche, welche alle Kugeln desselben Halbmessers berührt, deren Mittelpuncte in einer gegebenen Fläche liegen. 226
Parallele Flächen. 227
Correspondirende und parallele Curven. 229
Zusammenhang der gegenwärtigen mit den vorhergehenden Betrachtungen. 230

Achtes Capitel.

Cylindrische Flächen, ihre allgemeinen Gleichungen mit willkührlichen Functionen und mit partiellen Differentialien. 232
Aus der gegebenen erzeugenden und leitenden Linie die Gleichung des Cylinders finden. 235
Den Cylinder finden, dessen erzeugende Curve gegeben ist, und der eine gegebene Fläche ringsum berührt. . . 236
Flächen, welche alle Cylinder als besondere Fälle enthalten. 237
Allgemeine Gleichungen der *conischen* Flächen. . . 238
Aus der gegebenen erzeugenden Curve und dem Orte des Scheitels des Kegels die Gleichung der conischen Fläche finden. 239
Die conische Fläche finden, deren Scheitel gegeben ist, und die eine gegebene Fläche ringsum berührt. . . 240
Anwendung des Vorhergehenden auf die Optik und Perspective. 242
Allgemeine Gleichungen der *Rotationsflächen*. . . . 243
Vergleichung des Ausdruckes mit endlichen Grössen, mit gewöhnlichen und mit partiellen Differentialien. . 244
Aus der gegebenen erzeugenden Curve und der Achse der Rotation, die Rotationsfläche finden. 246
Beyspiele. 247
Bedingungen, unter welchen eine Fläche der zweyten Ordnung durch Rotation entstanden ist. 248
Bestimmung der Fälle, in welcher eine Fläche der zweyten Ordnung cylindrisch ist. 249
— — — und in welcher sie conisch ist. —

Seite

Neuntes Capitel.

Flächen, welche durch die Bewegung einer geraden Linie entstehen.

Wenn die Gerade mit der Ebene der x y parallele Linie immer durch die Achse der z und durch eine gegebene Curve geht. 251
Beyspiele. 252
Charakteristik dieser Flächen. 253
Wenn die gerade Linie immer durch die Achse der z und durch zwey gegebene Curven geht. 254
Charakteristik dieser Flächen. 255
Beyspiele. 257
Die Fläche finden, welche durch die Bewegung einer geraden Linie entsteht, die immer durch die Achse der z geht, und zwey gegebene Flächen berührt. . . —
Die Fläche finden, welche durch die Bewegung einer geraden Linie entsteht, die immer horizontal bleibt, und durch zwey gegebene Curven geht. 258
Die Fläche finden, welche durch die willkührliche Bewegung einer geraden Linie entsteht. 259
Beyspiel. 261

Zehntes Capitel.

Developpable Flächen.

Eigenschaften der developpablen Flächen. 263
Erzeugung der developpablen Flächen. 264
Charakteristik und Wendungscurve der developpablen Flächen. —
Endliche Gleichungen der developpablen Fläche, ihrer Charakteristik und ihrer Wendungscurve. 265
Gleichungen derselben zwischen partiellen Differentialien der ersten und zweyten Ordnung. 266
Eine andere Ableitung dieser Gleichungen. 267
Die Fläche finden, deren Elemente zu ihrer Projection in der Ebene der x y ein constantes Verhältniss haben. . 268
Die developpable Fläche finden, welche durch zwey gegebene Curven von doppelter Krümmung geht. . . . 269
Die developpable Fläche finden, welche zwey ihrer Gestalt und Lage nach gegebene Flächen berührt. . . . 271

Seite

Anwendung des Vorhergehenden auf den vollen und halben Schatten, welchen ein dunkler Körper von gegebener Gestalt wirft, der von einem leuchtenden Körper beschienen wird. 273

Andere Auflösung der vorhergehenden Aufgabe. . . . —

Die developpable Fläche finden, welche zwey Kugeln von gegebener Lage und Grösse ringsum berührt. . . . 274

Bestimmung der Fälle, in welchen die Flächen der zweyten Ordnung developpabel sind. 277

Wenn auf einer developpablen Fläche eine gegebene Curve verzeichnet ist, und diese Fläche in eine Ebene developpirt wird, die Form der Curve in dieser Ebene zu bestimmen. 279

Besonderer Fall, wenn die developpable Fläche cylindrisch ist. 280

Beyspiele. 281

Besonderer Fall, wenn die developpable Fläche conisch ist. 283

Eilftes Capitel.

Evoluten der Curven.

Die Curve finden, welche der Ort aller Mittelpuncte der Krümmung einer gegebenen ebenen Curve ist. . . . 285

Beyspiele. 286

Aus der gegebenen Evolute die Evolvente derselben finden. . —

Ein anderes Verfahren, dieselbe Aufgabe aufzulösen. . 287

Mechanische Entstehung der Evolvente durch Abwicklung eines Fadens von der Evolute. 289

Fortsetzung der vorhergehenden Betrachtungen auf Curven von doppelter Krümmung. —

Durchschnitte der Ebenen, welche auf den Elementen einer gegebenen Curve von doppelter Krümmung senkrecht stehen. 291

Fläche, welche der geometrische Ort aller Pole einer Curve von doppelter Krümmung ist. 292

Mechanische Entstehung der Evolute einer Curve von doppelter Krümmung. 293

Bey Curven von doppelter Krümmung ist die Curve der Mittelpuncte der Krümmung nicht die Evolute derselben. 294

Zu jeder gegebenen Curve von doppelter Krümmung die developpable Fläche finden, welche der Ort aller Evoluten der Curve ist. —

Seite

Die Wendungscurve dieser developpablen Fläche finden. 295

Zu jeder gegebenen Curve von doppelter Krümmung die Evoluten derselben finden. 297

Die vorhergehenden Betrachtungen allgemein angestellt. . 298

Gleichung der Geraden, die eine gegebene ebene Curve unter einem gegebenen Winkel schneidet. . . 299

Bestimmung der Evolutoide einer gegebenen ebenen Curve. 300

Bestimmung des Radius der Evolutoide. —

Die Gleichung des Kegels suchen, dessen Scheitel auf einer gegebenen ebenen Curve sich bewegt, während die Achse des Kegels immer Tangente jener Curve ist. . 302

Bestimmung der developpablen Fläche, welche der Ort aller Evolutoiden einer gegebenen ebenen Curve ist. . 303

Fortsetzung dieser Betrachtungen auf Curven von doppelter Krümmung. 304

Beyspiel. 305

Zwölftes Capitel.

Mit den vorhergehenden Betrachtungen verwandte Aufgaben.

Gleichungen der Seiten eines ebenen Dreyeckes. . . . 308

Daraus abgeleitete Ausdrücke der ebenen Trigonometrie. . 309

Besondere Ableitung der Hauptgleichung der ebenen Trigonometrie. 312

Deduction der Ausdrücke der sphärischen Trigonometrie. 313

Andere Deduction derselben Ausdrücke. 314

Fläche eines sphärischen Dreyeckes. 316

Fläche eines sphärischen Polygons. 317

Auf wie viele Arten sich die Oberfläche einer Kugel mit gleichen und regelmässigen sphärischen Vielecken bedecken lasse. 318

Ausdruck des körperlichen Inhalts eines schiefen Parallelepipedums. 320

Dasselbe durch rechtwinklichte Coordinaten. . . . 321

Dasselbe durch Polarcoordinaten. 322

Dasselbe durch partielle Differentialien zwischen rechtwinklichten Coordinaten. 323

Dasselbe durch partielle Differentialien zwischen Polarcoordinaten. 324

Gegen einen ersten Ort sey die Lage eines zweyten, und

Seite

die eines dritten gegeben. Man suche die Lage des dritten Ortes gegen den zweyten. 326
Bestimmung des Raumes, ausser welchem der dritte Ort von dem zweyten nicht mehr gesehen werden kann, und Anwendung auf die Planeten unseres Sonnensystems. 329
Flächen, welche durch die Bewegung eines Kreises entstehen, dessen Ebene immer senkrecht auf der gegebenen Curve steht, die der Mittelpunct des Kreises durchläuft. 331
Dasselbe, wenn auch der Halbmesser des Kreises nach einem gegebenen Gesetze veränderlich ist. . . . 334
Flächen, für die einer der zwey Krümmungshalbmesser constant ist. 335
Flächen, für die einer der beyden Krümmungshalbmesser immer unendlich ist. 336
Flächen, für welche die beyden Krümmungshalbmesser einander gleich, aber von entgegen gesetzten Zeichen sind. 337
Flächen, für welche die beyden Krümmungshalbmesser von gleicher Grösse und Lage sind. 338
Der Scheitel eines Kegels, der eine Fläche der zweyten Ordnung ringsum berührt, bewege sich auf einer geraden Linie. Man suche die Fläche, welche durch die auf einander folgenden Durchschnittslinien der beweglichen Ebene entsteht, die durch die Curve geht, in welcher der Kegel die Fläche der zweyten Ordnung berührt. 339
Dasselbe, wenn sich der Scheitel des Kegels in einer der x y parallelen Ebene bewegt. 340
Dasselbe, wenn sich der Scheitel des Kegels in einer gegebenen Curve von doppelter Krümmung bewegt. . 341
Dasselbe, wenn der Scheitel des Kegels sich in einer gegebenen Fläche bewegt. 343
Besonderer Fall, wenn der Scheitel des Kegels sich in einer gegebenen Ebene. 344
— — und in einer andern gegebenen Fläche der zweyten Ordnung bewegt. 345

Dreyzehntes Capitel.

Anwendungen der analytischen Geometrie auf die Optik.

Analytische Ausdrücke, dass der auf eine Fläche einfallende Strahl, die Normale der Fläche, und der zurück-

Seite

geworfene Strahl in *einer* Ebene liegt, und dass der Einfallswinkel dem Reflexionswinkel gleich ist. . . 347
Gleichungen des reflectirten Strahles. 348
Bestimmung derjenigen reflectirten Strahlen, die sich schneiden. 349
Bestimmung der Richtung, in welcher man von einem Puncte der Fläche zu dem nächstfolgenden Punct gehen muss, damit ihre reflectirten Strahlen sich schneiden. 350
Reflexionscurven. 351
Die developpable Fläche, welche die Folge der reflectirten sich schneidenden Strahlen enthält. —
Die Wendungscurve dieser developpablen Fläche. . . —
Caustische Flächen. 352
Analytische Bestimmung jener developpablen Fläche, ihrer Wendungscurve und der caustischen Fläche. . . 353
Anwendung der vorhergehenden allgemeinen Betrachtungen auf den Fall, wenn die reflectirende Fläche durch Rotation einer Curve um die Achse der x entstanden ist. 354
Die Rotationsfläche finden, für welche alle reflectirten Strahlen der Rotationsachse parallel sind. 358
Besonderer Fall, wenn die reflectirende Fläche eine Ebene, ein ebener Spiegel ist. 359
Wenn die reflectirende Fläche eine Kugel ist. . . . 360
Anwendung der vorhergehenden Untersuchungen auf die Dioptrik. 362
Wenn der Ort eines leuchtenden Punctes oder einer leuchtenden Curve, oder einer leuchtenden Fläche, und der Ort des Auges gegeben ist, die Orte auf der Spiegelfläche bestimmen, in welchen die Reflexion Statt hat. 364

Vierzehntes Capitel.

Anwendungen auf die Mechanik.

Allgemeine Ausdrücke der Kraft und der Geschwindigkeit. 366
Zerlegung und Zusammensetzung der Kräfte und der Geschwindigkeiten. 367
Allgemeine Gleichung des Gleichgewichtes. . . . 370
Rücksicht auf die äusseren Bedingungen des Gleichgewichtes. 372
Bestimmung des Druckes des Körpers auf die Curve oder auf die Fläche, in welcher er im Gleichgewichte ist. 374
Allgemeine Gleichung der Bewegung. 376

Seite

Rücksicht auf die äusseren Bedingungen der Bewegung. . 377

Druck des Körpers auf die Curve, oder auf die Fläche, in welcher er sich bewegt. 378

Besondere Fälle für das Gleichgewicht. Bestimmung des Gleichgewichtes eines Punctes, auf welchen eine Anzahl Kräfte nach gegebenen Richtungen wirken. . 379

Wenn der Körper auf einer gegebenen Fläche zu bleiben gezwungen ist. 380

Wenn er auf einer Kugel bleiben muss. 381

Wenn er auf einer gegebenen Curve bleiben muss. . . 382

Wenn er auf einer geraden Linie bleiben muss. . . 383

Besondere Fälle für die Bewegung. Bestimmung der Bewegung eines Körpers, auf welchen bloss einen Augenblick thätige Kräfte wirken. —

Wenn eine immer thätige, constante Kraft nach derRichtung der x wirkt; Theorie der frey fallenden Körper. 384

Wenn diese Kraft sich verkehrt wie das Quadrat der Entfernung verhält. 385

Bewegung in krummen Linien. Bestimmung der Bewegung eines Körpers, auf welchen immer thätige constante Kräfte nach den Richtungen der drey Achsen der Coordinaten wirken. 386

Besondere Fälle dieser Aufgabe. 389

Einfachere Auflösung derselben Aufgabe; Theorie der Wurfbewegung. 390

Bewegung eines Körpers, auf welchen eine Kraft wirkt, die immer nach einem gegebenen festen Punct wirkt (Centralkraft). 392

Bestimmung der Kraft, wenn die Curve gegeben ist, in welcher sich der Körper bewegt, und umgekehrt. . 393

Besondere Fälle. 394

Bestimmung der Bewegung eines Körpers, wenn die Kraft sich wie verkehrt das Quadrat ihrer Entfernung verhält. 395

Allgemeine Auflösung derselben Aufgabe. 397

Allgemeine Gleichung der Linien der zweyten Ordnung, in Beziehung auf drey Coordinaten. 401

Bestimmung der Bewegung eines Körpers, wenn die Kraft sich wie die Entfernung verhält. 404

Allgemeine Auflösung derselben Aufgabe. 407

Gedruckt bey Anton Strauss.

Bayerische StaatsBibliothek

Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Littrow, Joseph Johann <<von>>,

Analytische Geometrie

Wien 1823

Math.p. 315 m
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082317-6